DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE

Zadar, 27.–29. ožujka 2011.

UPUTE NATJECATELJI(CA)MA!
∗ Pri rješavanju zadataka točno se držite u njima danih uputa.
∗ Ako se u zadatcima susretnete s nepoznatim sadržajima, oslonite se na umetnute naputke. Može se riješiti neki zadatak i bez prethodnoga susreta s takvom vrstom zadataka.
∗ 'Ili' shvatite uključno ako nije drukčije rečeno.

Ispravna rješenja donose 3 boda, izostanak rješenja donosi 1 bod, a neispravno rješenje 0 bodova. Iznimka: 1 (a) gdje ispravno rješenje može donijeti 3 ili 6 bodova.

REZULTATI:

Zadatak	Maksimalni broj bodova	*bodovi (1. ispravljanje), potpis*	*bodovi (2. ispravljanje), potpis*	*konačni bodovi, potpis*
1.	18			
2.	15			
3.	33			
4.	18			
5.	24			
6.	18			
7.	12			
8.	27			
UKUPNO:	165			

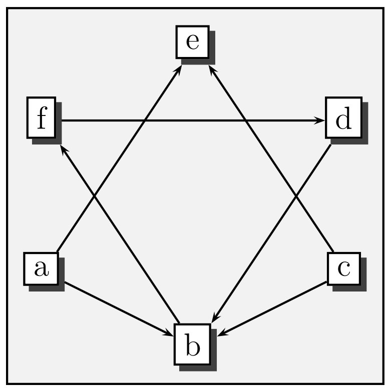
❶ Proučite sljedeći citat!

> Društvene veze, posebno one koje uključuju pozitivne sentimente, često stvaraju tranzitivne konfiguracije. [. . .] Snažne tendencije prema tranzitivnosti stvaraju (tranzitivno) zatvaranje i teže fragmetiranju skupina u različite klike.
> Peter V. Marsden. 2000. Social Networks. U *Encyclopedia of Sociology*, E. Borgatta i R. Montgomery (ured.), Macmillan

Slika 1 prikazuje jednu "društvenu vezu koja uključuje pozitivne sentimente" među osobama a, b, c, d, e, f ali prije njezinoga "tranzitivnoga zatvaranja", gdje pod 'tranzitivnim zatvaranjem društvene veze R koja uključuje pozitivne sentimente' razumijemo ispunjenje uvjeta:

$$\forall x \forall y \forall z((Rxy \land Ryz \land x \neq z) \to Rxz)$$

(a) Nadopunite sliku tako da docrtate sve strelice i vrhove strelica koje su posljedica takvoga tranzitivnoga zatvaranja!



Slika 1: Strelica svojim vrškom pokazuje na osobu prema kojoj osoba na ishodištu strelice ostvaruje društvenu vezu koja uključuje pozitivne sentimente.

(b) Pretpostavimo da je dovoljan i nužan uvjet da bi neki, najmanje dvočlani skup k bio klika u tome da on obuhvaća najveći broj osoba među kojima je društvena veza R koja uključuje pozitivne sentimente uzajamna, tj.

Definicija 1 k *je klika akko*

i. $\exists x \exists y \ (x \neq y \land x \in \mathrm{k} \land y \in \mathrm{k})$,

ii. $\forall x \forall y((x \neq y \land x \in \mathrm{k} \land y \in \mathrm{k}) \to (Rxy \land Ryx))$, *te*

iii. za svaki skup $\mathrm{k}' \neq \mathrm{k}$ *vrijedi da*

$$\forall x(x \in \mathrm{k} \to x \in \mathrm{k}') \to \exists y \exists z(y \in \mathrm{k} \land z \in \mathrm{k}' \land \neg Ryz)$$

gdje $x \in \mathrm{k}$ *znači —'*x *je član skupa* k*'.*

i. Koliko klika nastaje nakon tranzitivnoga zatvaranja na gornjoj slici opisane društvene veze R koja uključuje pozitivne sentimente?

ii. Navedite članove najbrojnije klike k koja nastaje nakon tranzitivnoga zatvaranja društvene veze opisane na gornjoj slici!

iii. Nazovimo 'aspirantom' osobu koja je u društvenoj vezi koja uključuju pozitivne sentimente, prema svim članovima neke klike kojoj ne pripada. Navedite sve aspirante nakon tranzitivnoga zatvaranja društvene veze opisane na gornjoj slici!

iv. Nakon tranzitivnoga zatvaranja društvene veze R koja uključuje pozitivne sentimente svaka osoba postaje članom najviše jedne klike.

Da Ne

---

❷ Zaokružite DA ili NE, ovisno o istinitosti sljedećih tvrdnja:

(a) U induktivnome zaključku (u suvremenome smislu) uvijek zaključujemo s posebnoga na opće.

Da Ne

(b) U poopćavajućem induktivnome zaključku uvijek neki pojam ima ulogu *tertium comparationis*.

Da Ne

(c) Reprezentativnost posebnih slučaja od kojih polazimo u zaključivanju, uvjet je m̌aksimalne vjerojatnosti zaglavka poopćavajuće (nepotpune) indukcije.

Da Ne

(d) Ako hipoteza h uz pomoću teorije T daje posljedicu p, koja je empirijski opovrgnuta, nužno je napustiti hipotezu h.

Da Ne

(e) G. Frege znameniti je francuski logičar devetnaestoga i dvadesetoga stoljeća.

Da Ne

---

❸ Rupert, nepogrješivi logičar s ovih natjecanja, razgovarao je jednom s predstavnicima stanovnika pet zemalja. Kako Rupert nije spomenuo imena tih zemalja, nazovimo ih jednostavno slovima a, b, c, d i e. Stanovnici zemlje b mislili su da je nabolje živjeti u zemlji a, stanovnici zemlje c težili su preseliti se u zemlju b, stanovnici zemlje d najradije bi svi otišli u zemlju e, stanovnicima zemlje a želja je bila živjeti u zemlji d, a stanovnici zemlje e mnogo bi dali samo da žive u zemlji c. (Usput, Rupert je svima savjetovao da uopće nema potrebe za velikim preseljavanjem iz jedne zemlje u drugu).

Neka Rxy znači: stanovnici zemlje x teže preseliti se (zbog boljega života) u zemlju y. Zaokružite DA ili NE uz sljedeće iskaze, onako kako bi to učinio Rupert, ovisno o tom opisuju li iskazi točno želje i težnje stanovnika spomenutih zemalja:

(a) $\forall x \exists y Rxy$

DA NE

(b) $\exists y \forall x (Ryx \vee \neg y = x)$

DA NE

(c) $\exists y \forall x (Ryx \vee Rxy)$

DA NE

(d) $\forall x \exists y (Ryx \wedge \neg Rxy)$

DA NE

(e) $\exists x \exists y \exists z (Rxy \wedge Ryz \wedge Rzx)$

DA NE

(f) $\exists x \exists y \exists z \exists x_1 \exists x_2 (Rxy \wedge Ryz \wedge Rzx_1 \wedge Rx_1x_2 \wedge Rx_2x)$

DA NE

(g) $\exists x \exists y (\neg Rxy \to \exists x Rxx)$

DA NE

(h) $\forall x \exists y (Rxx \to \neg Ryx)$

DA NE

(i) $\exists x \exists y ((Rxx \vee \neg Ryy) \wedge \forall z (Rzx \vee Rzy))$

DA NE

(j) $\exists x \exists y \exists z \exists w \exists x_1 (Rx_1x \wedge Rx_1y \wedge Rx_1z \wedge Rx_1w)$

DA NE

(k) $\forall x \forall y ((Rxy \wedge \neg Ryx) \to \exists z (Rzy \wedge \neg Rzx))$

DA NE

❹ Popunite križaljke upisujući samo po jedno glagoljično slovo na slobodna polja tako da svi zadani iskazi budu istiniti!

Predmetno su *područje slobodna polja u križaljci.*

Ⱅ(x) znači 'na slobodnom polju x nalazi se slovo Ⱅ',

Ⱎ(x) znači 'na slobodnom polju x nalazi se slovo Ⱎ',

Ⰿ(x) znači 'na slobodnom polju x nalazi se slovo Ⰿ',

Ⰶ(x) znači 'na slobodnom polju x nalazi se slovo Ⰶ',

$Izmedju(x, y, z)$ znači 'x je između y i z, te se x, y i z nalaze u istome retku ili u istome stupcu ili na istoj dijagonali',

$IstoSlovo(x, y)$ znači 'na x i na y nalazi se isto slovo',

$IstiRedak(x, y)$ znači 'x i y se nalaze u istom retku',

$IstiStupac(x, y)$ znači 'x i y se nalaze u istom stupcu',

$LijevoOd(x, y)$ znači 'x se nalazi u stupcu koji je lijevo od stupca u kojemu se nalazi y'.

(a) Zadani su sljedeći iskazi:

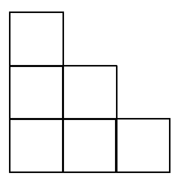
i. $\forall x(\text{Ⱅ}(x) \vee \text{Ⱎ}(x) \vee \text{Ⰿ}(x))$

ii. $\forall x \forall y(IstiRedak(x, y) \leftrightarrow IstoSlovo(x, y))$

iii. $\forall x \forall y((\text{Ⱅ}(x) \wedge \text{Ⱅ}(y)) \rightarrow x = y)$

iv. $\exists x(\text{Ⰿ}(x) \wedge \forall y(x \neq y \rightarrow \neg IstiStupac(x, y)))$

Popunite križaljku!



(b) Zadani su sljedeći iskazi:

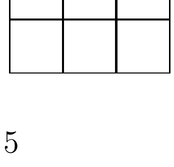
i. $\forall x(\text{Ⱅ}(x) \vee \text{Ⱎ}(x) \vee \text{Ⰿ}(x)) \vee \text{Ⰶ}(x))$

ii. $\forall x(\text{Ⰿ}(x) \leftrightarrow \forall y(x \neq y \rightarrow \exists z\ Izmedju(x, y, z)))$

iii. $\forall x(\text{Ⰶ}(x) \rightarrow \forall y \neg LijevoOd(y, x))$

iv. $\forall x(\neg \text{Ⱅ}(x) \leftrightarrow \forall y \forall z((\exists u\ Izmedju(y, x, u) \wedge \exists w Izmedju(z, x, w)) \rightarrow y = z))$

Popunite križaljku!



❺ Polazeći od odnosa istinitosnih vrijednosti iskaza u tradicionalnome logičkome kvadratu, upišite ispred sljedećih iskaza oznaku a, e, i ili o, ovisno o tom na koji biste vrh logičkoga kvadrata svrstali iskaze (oznake označuju samo o kojem se vrhu radi, ne nužno i vrstu iskaza, budući da su uključeni i iskazi iskazne logike).

Napomene. Svi priroci imaju neprazan opseg. U nekim slučajima lijeva i desna strana kvadrata mogu zamijeniti mjesta — tada upišite samo jedno rješenje. U primjerima iz piročne logike shvatite kao da je predmetno područje ograničeno na “subjekt” (u smislu tradicionalne logike) — “subjekt” je prema tome izražen samo količiteljem, ne i posebnim prirokom.

(a) ___ $A \wedge B \wedge C$

___ $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

___ $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

___ $A \vee B \vee C$

(b) ___ $A \rightarrow B$

___ $B \rightarrow A$

___ $\neg(A \rightarrow B)$

___ $\neg(B \rightarrow A)$

(c) ___ $\neg(A \vee (\neg B \vee C))$

___ $\neg((\neg A \wedge B) \wedge \neg C)$

___ $\neg(A \wedge \neg(B \vee \neg C))$

___ $\neg((\neg A \vee B) \vee \neg C)$

(d) ___ $\neg C \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

___ $\neg(\neg C \vee (\neg B \rightarrow \neg A))$

___ $\neg(A \wedge \neg(C \rightarrow B))$

___ $\neg(A \vee (B \rightarrow C))$

(e) ___ $\neg(\neg(A \vee \neg B) \rightarrow C)$

___ $(\neg A \wedge B) \vee \neg C$

___ $\neg(\neg(B \rightarrow A) \vee \neg C)$

___ $\neg(B \rightarrow A) \rightarrow C$

(f) ___ $\forall x(\neg Fx \wedge Gx)$

___ $\neg\forall x\neg(Gx \rightarrow Fx)$

___ $\forall x(Fx \vee \neg Gx)$

___ $\exists x\neg(Gx \rightarrow Fx)$

(g) ___ $\neg\exists x\neg(Px \wedge Qx)$

___ $\exists x\neg(Px \wedge Qx)$

___ $\neg\exists x(Px \wedge Qx)$

___ $\neg\forall x\neg(Px \wedge Qx)$

(h) ___ $\neg\forall x(Rx \leftrightarrow \neg Qx)$

___ $\forall x(Qx \leftrightarrow \neg Rx)$

___ $\neg\exists x(Qx \leftrightarrow \neg Rx)$

___ $\neg\forall x\neg(Qx \leftrightarrow \neg Rx)$

❻ U namjeri da pokaže da pravila prirodne dedukcije ne mogu biti proizvoljna, Arthur Prior je 1960. uveo poveznik tonk pomoću sljedećih pravila:

- Uvođenje: p dokazuje (p tonk q)
- Isključenje: (p tonk q) dokazuje q

(a) Proširimo jezik i sustav naravne dedukcije za iskaznu logiku poveznikom tonk i njegovim pravilima, te tako dobivenu logiku nazovimo 'tonk logika'. Procijenite točnost sljedećih tvrdnji!

i. U tonk-logici bilo koji skup iskaza može dokazati neistinu.

Da Ne

ii. U tonk-logici svaki se iskaz može dokazati.

Da Ne

iii. Iskazi iz jezika iskazne logike koji se ne mogu bez dodatnih pretpostavki dokazati u sustavu naravne dedukcije za iskaznu logiku, neće se moći bez dodatnih pretpostavki dokazati ni u tonk-logici.

Da Ne

(b) Pridodajmo tonk-logici dvovrijednosni semantički sustav iskazne logike, te razmislimo o istinitosnim uvjetima rečenica kojima je oblik p tonk q! Predstavimo semantičku definiciju pomoću tablice kojoj će prvi stupac sadržavati istinitosne vrijednosti lijevoga člana, a prvi redak istinitosne vrijednosti desnoga člana tonk iskaza (u unutarnjem dijelu tablice nalazimo rezultirajuće vrijednosti).

i. $p \to (p \text{ tonk } q)$ jest tautologija ako tonk definiramo analogno disjunkciji:

`tonk`	i	n
i	i	i
n	i	n

Da Ne

ii. $(p \text{ tonk } q) \to q$ jest tautologija ako tonk definiramo analogno pogodbi (tj. povezniku $\to$):

`tonk`	i	n
i	i	n
n	i	i

Da Ne

iii. Unutar semantičkoga sustava iskazne logike moguće je pronaći definiciju za tonk takvu da i $p \to (p \text{ tonk } q)$ i $(p \text{ tonk } q) \to q$ budu tautologije.

Da Ne

❼ Roy T. Cook je 2005. opisao četverovrijednosnu semantiku iskazne logike u kojoj vrednovanje svakoj rečenici pridružuje točno jednu od sljedećih vrijednosti: T (istinito), B (i istinito i neistinto), N (ni istinito ni neistinito), F (neistinito). Nazovimo T i B 'vrijednostima koje sadrže istinu', a T i N 'vrijednostima koje ne sadrže neistinu'. Definirajmo slijed kao ispunjenje barem jednoga od dva uvjeta: bilo uvjeta nasljeđivanje sadržavanja istine bilo uvjeta nasljeđivanja nesadržavanja neistine:

Definicija 2 (Cookov slijed) *Iz skupa iskaza* Γ *semantički slijedi iskaz* p *akko za svako vrednovanje vrijedi da* p *sadrži istinu ako svi iskazi iz* Γ *sadrže istinu ili za svako vrednovanje vrijedi da* p *ne sadrži neistinu ako nijedan iskaz iz* Γ *ne sadrži neistinu.*

(a) Procijenite za svaku od ponuđenih definicija poveznika tonk jamči li ona da (p tonk q) slijedi iz p i istodobno da q slijedi iz (p tonk q) u smislu "Cookova slijeda"!

i.

`tonk`	T	B	N	F
T	T	B	T	F
B	T	B	T	F
N	N	F	N	F
F	N	F	N	F

Da Ne

ii.

`tonk`	T	B	N	F
T	T	B	T	B
B	T	B	T	B
N	N	F	F	N
F	N	F	F	N

Da Ne

iii.

`tonk`	T	B	N	F
T	T	B	T	B
B	T	B	T	B
N	N	F	N	F
F	N	F	N	F

Da Ne

(b) Ispitivanje provedeno u ovome zadatku dokazuje da je moguć semantički sustav koji opravdava Priorova pravila za poveznik tonk.

Da Ne

❽ Zaokružite DA ili NE, ovisno o istinitosti sljedećih tvrdnja:

(a) Zakon neprotuslovlja i zakon isključenoga srednjega istovrijedni su.
DA NE

(b) Neki nezadovoljiv iskaz može biti istovrijedan s nekim zadovoljivim iskazom.
DA NE

(c) Svaki je zadovoljiv iskaz valjan.
DA NE

(d) Zakon neprotuslovlja logički slijedi iz iskaza ‘Kiša pada’.
DA NE

(e) Ako je iskaz zadovoljiv, njemu protuslovan iskaz uvijek je nezadovoljiv.
DA NE

(f) Premise i zaglavak nevaljana zaključka uvijek čine nezadovoljiv skup iskaza.
DA NE

(g) Premise i zaglavak valjana zaključka uvijek čine zadovoljiv skup iskaza.
DA NE

(h) Dodavanjem novih premisa uvijek možemo iz nevaljana zaključka dobiti valjan zaključak.
DA NE

(i) Dodavanjem novih premisa uvijek možemo iz valjana zaključka dobiti nevaljan zaključak.
DA NE