DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE

Varaždin, 23.-25. travnja 2014.

BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

ZADATAK	**BROJ BODOVA**	**MAX BODOVA**
1.		30
2.		30
3.		24
4.		21
5.		42
6.		69
7.		57
UKUPNO		**273**

Vrijeme rješavanja testa: **90 minuta**

Zadatak 1.

U ovome se zadatku koriste nazivi šahovskih figura te ploča nalik na šahovsku, samo manjih dimenzija, ali poznavanje igre šaha neće igrati ulogu u rješavanju zadatka budući da nije potrebno primjenjivati šahovska pravila.
Zadan je niz sudova. Predmetno su područje polja tablice $A1, ..., A5, B1, ..., B5, ...E1..., E5$. Predikatna slova predstavljaju sljedeće predikate:

- Predikati boje figure:
  - C^1x: Crni ("Na polju x nalazi se crna figura", analogno dalje)
  - B^1x: Bijeli
- Predikati oblika figure:
  - P^1x: Pješak ("Na polju x nalazi se pješak", analogno dalje)
  - T^1x: Top
  - S^1x: Skakač
  - L^1x: Lovac
  - D^1x: Dama
  - K^1x: Kralj
- Odnosi su definirani na sljedeći način:
  - $Pored^2xy$: označava dva polja koja se dodiruju (i dijagonalno)
  - $IstiRed^2xy$: dva su polja u istome redu
  - $IstiStupac^2xy$: dva su polja u istome stupcu
  - $IsteBoje^2xy$: na poljima x i y nalaze se figure iste boje (obje C ili B)
  - $x = y$: Identično
  - $x \neq y$: Različito
  - Iza^2xy: x je u višem redu od y (mada ne nužno i u istome stupcu, npr. $A1$ je iza $B5$)
  - $DesnoOd^2xy$: x je u stupcu desno od stupca u kojem je y (mada ne nužno i u istome redu, npr. $B5$ je desno od $A1$).

Brojčani pokazatelji uz predikate pokazuju broj praznih mjesta uz predikate (mjesnost). Predikati '=' i '≠' također su dvomjesni, no uz njih se uobičajeno ne navodi broj praznih mjesta.

Upišite na odgovarajuća polja sva i samo ona predikatna slova potrebna da svi dolje navedeni sudovi budu istiniti. Na polje se prvo upisuje predikat boje figure, potom predikat oblika figure, svaki se tip upisuje samo jednom, te oba tipa predikata moraju biti upisana. Na primjer, bijeloga kralja označavamo upisujući u odgovarajuće polje 'BK'. Na ona polja na kojima se neće nalaziti nijedna figura upišite znak '×'.
Napomena: Svaki točno ispunjen redak i svaki točno ispunjen stupac nose po tri boda.

	1	2	3	4	5
A					
B					
C					
D		BS			
E	BL	BK			BT

Sudovi:

1. $\forall x(C^1x \to (\exists y(x \neq y \wedge C^1y \wedge Pored^2xy \wedge IstiRed^2xy) \wedge \exists y(x \neq y \wedge C^1y \wedge Pored^2xy \wedge IstiStupac^2xy)))$
2. $\exists x(P^1x \wedge \forall y(P^1y \to x = y))$
3. $\forall x((C^1x \wedge K^1x) \to \neg\exists y(Iza^2yx \vee DesnoOd^2yx))$
4. $\forall x\forall y(C^1x \wedge K^1x \wedge C^1y \wedge D^1y) \to (\neg IstiRed^2xy \wedge \neg IstiStupac^2xy))$
5. $\exists x\exists y(C^1x \wedge L^1x \wedge C^1y \wedge D^1y \wedge \neg IstiRed^2xy))$
6. $\forall x\forall y\forall z\forall u\forall v((IsteBoje^2xy \wedge IsteBoje^2yz \wedge IsteBoje^2zu \wedge IsteBoje^2uv) \to (x = y \vee x = z \vee x = u \vee x = v \vee y = z \vee y = u \vee y = v \vee z = u \vee z = v \vee u = v))$
7. $\exists x\exists y(B^1x \wedge K^1x \wedge C^1y \wedge K^1y \wedge x \neq y)$

(10×3 boda = 30 bodova)

Zadatak 2.

Neka je $F \rightsquigarrow G$ pokrata za odnos između formula F i G ako vrijedi:

iz F logički slijedi G
iz G logički ne slijedi F

Ako vrijedi $F \rightsquigarrow G$ i $G \rightsquigarrow H$, to možemo skraćeno zapisati kao $F \rightsquigarrow G \rightsquigarrow H$, analogno za veći broj formula.
Na prazne crte upišite odgovarajuće formule vodeći računa o sljedećem:

- Na početku svakog niza naveden je skup dopuštenih iskaznih slova i/ili predikata koje se mogu (ali ne moraju) iskoristiti, te **nije** dopušteno korištenje drugih iskaznih slova ili predikata.
- Ako postoji više mogućih rješenja, dovoljno je navesti jedno.
- Ako rješenje ne postoji, upišite "/".
- Simbol $\top$ zamjenjuje bilo koju tautologiju.
- Bodovi se za ispravno popunjenu crtu dobivaju samo ako je i ostatak podzadatka ispravno riješen.

Prvi je podzadatak riješen.

1. $\{P, Q\}$: $P \wedge Q \rightsquigarrow \underline{P} \rightsquigarrow P \vee Q$
2. $\{P, Q\}$: $P \wedge Q \rightsquigarrow$ __________ $\rightsquigarrow Q$
3. $\{P, Q, S\}$: $P \wedge Q \wedge S \rightsquigarrow$ __________ $\rightsquigarrow$ __________ $\rightsquigarrow$ __________ $\rightsquigarrow$ $(Q \rightarrow S) \rightarrow P \rightsquigarrow$ __________ $\rightsquigarrow$ __________ $\rightsquigarrow \top$
4. $\{=\}$: $\exists x \forall y (x = y) \rightsquigarrow$ ____________________ $\rightsquigarrow$ $\forall x \forall y \forall z \forall w (x = y \vee y = z \vee z = w \vee w = x)$
5. $\{R^2\}$: $\forall x Rxx \wedge \forall x \forall y \forall z (Rxy \rightarrow (Rxz \rightarrow Ryz)) \rightsquigarrow$ ____________________ $\rightsquigarrow$ $\forall x \forall y \forall z (Rxy \rightarrow (Ryz \rightarrow Rxz))$
6. $\{P^2, S^2\}$: $\forall x \exists y \forall z (Pyx \wedge Syz) \rightsquigarrow$ ____________________ $\rightsquigarrow$ ____________________ $\rightsquigarrow \forall x \exists y Syx$

(10×3 boda = 30 bodova)

Zadatak 3.

a) Pronađite najkraću formulu istovrijednu sljedećim formulama, takvu da se u njoj bilo koji od simbola (,), $A, B, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ pojavljuje najviše jedanput. Najkraća je ona formula koja sadrži najmanji broj navedenih simbola. Ako se u formuli javljaju i A i B i ako je to moguće, A se mora pojavljivati ispred B.

1. $\neg(A \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge \neg B)) \equiv$ __________
2. $\neg(A \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \wedge B)) \equiv$ __________
3. $(A \vee \neg B) \leftrightarrow ((B \vee A) \rightarrow \neg(\neg A \leftrightarrow B)) \equiv$ __________
4. $(B \vee (\neg B \wedge \neg A)) \rightarrow (A \wedge (\neg B \leftrightarrow A)) \equiv$ __________
5. $((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)) \rightarrow (A \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee \neg A)) \equiv$ __________

Napomena: U podzadatcima **b)**, **c)** i **d)** priznaje se samo potpuno rješenje. Par x i y, gdje su x i y brojevi redaka u kojima se formula pojavljuje, zapisujemo $'(x, y)'$, što **nije identično** paru (y, x).

b) Navedite parove formula iz podzadatka **a)** (navodeći njihove brojeve kao što je objašnjeno u napomeni), takve da je prva formula u paru ekvivalentna (istovrijedna) drugoj. Nije potrebno navoditi da je formula ekvivalentna samoj sebi, npr. (1,1).
Rješenje: ____________________

c) Navedite parove formula iz podzadatka **a)** takve da prva formula u paru implicira drugu formulu u paru (odnosno, da iz prve formule logički slijedi druga formula). Nije potrebno navoditi da formula implicira samu sebe, npr. (1,1).
Rješenje: ____________________

d) Navedite parove formula iz podzadatka **a)** takve da su formule u paru u kontradikciji.
Rješenje: ____________________

(8×3 boda = 24 boda)

Zadatak 4.

Zadani su sljedeći tromjesni predikati koji operiraju nad skupom prirodnih brojeva koji sadrži 0 ($\mathbb{N}_0$):

$$S^3xyz \equiv x + y = z$$
$$P^3xyz \equiv x \times y = z$$

Zapišite sljedeće formule u jeziku logike predikata bez korištenja relacije identiteta '='. a, b i c označavaju prirodne brojeve. U rješenjima nije dopušteno koristiti brojeve 0, 1, 2, ... Primjer 1. je riješen.

1. $a = 0 \equiv \forall x Saxx$
2. $a = 1 \equiv$ ________________________
3. $a = 2 \equiv$ ________________________
4. $a = b \equiv$ _____________________________
5. $a \leq b \equiv$ _____________________________
6. b je djeljivo s $a \equiv$ _____________________________
7. a je najmanji zajednički višekratnik brojeva b i $c \equiv$
   ____
8. a je najveći zajednički djelitelj brojeva b i $c \equiv$
   ____

(7×3 boda = 21 bod)

Zadatak 5.

1. Uvedimo novi operator u iskaznu logiku: operator $\bigcirc$. Taj operator ne ovisi samo o istinitosti svoga argumenta (npr. za neku formulu ϕ, istinitost $\neg\phi$ ovisi samo o istinitosti ϕ), već o *strukturi* svoga argumenta. Stoga će on imati istu istinitosnu vrijednost (istinito ili neistinito) u svakome retku tablice, budući da se struktura argumenta ne mijenja ovisno o redovima tablice. Operator $\bigcirc$ definiran je na sljedeći način: za neku formulu ϕ, $\bigcirc\phi$ je istinito ako i samo ako ϕ nije valjana formula.
P i Q su jednostavni podiskazi u svim formulama koje se javljaju u ovome zadatku. Stoga je $\bigcirc P$ istinito jer formula P nije valjana, a $\bigcirc(Q \rightarrow Q)$ nije istinito jer je formula $Q \rightarrow Q$ valjana.

Zaokružite `I` ako je formula istinita, `N` ako je neistinita, a `/` ako je istinitost neodrediva.

1. $\bigcirc(P \wedge \neg P)$	`I N /`
2. $\bigcirc\bigcirc\neg P$	`I N /`
3. $\bigcirc(\bigcirc P \rightarrow P) \rightarrow P$	`I N /`
4. $\bigcirc(P \rightarrow \bigcirc P)$	`I N /`
5. $\bigcirc P \rightarrow \bigcirc\bigcirc P$	`I N /`
6. $\bigcirc(\bigcirc P \leftrightarrow \bigcirc(Q \wedge \neg P)) \rightarrow \bigcirc P$	`I N /`
7. $\bigcirc(P \rightarrow Q) \rightarrow (\bigcirc P \rightarrow \bigcirc Q)$	`I N /`

2. Uvedimo i sljedeće operatore: $\blacksquare$ i $\Diamond$. Za neki sud ϕ, $\blacksquare\phi \equiv \neg\bigcirc\phi$, a $\Diamond\phi \equiv \neg\blacksquare\neg\phi$. Zaokružite `I` ako je formula istinita, `N` ako je neistinita, a `/` ako je istinitost neodrediva.

1. $\blacksquare P \rightarrow P$	`I N /`
2. $\blacksquare(\blacksquare(P \rightarrow Q) \rightarrow (\blacksquare P \rightarrow \blacksquare Q)$	`I N /`
3. $\blacksquare(\blacksquare\Diamond P \rightarrow P)$	`I N /`
4. $(\Diamond P \wedge \Diamond Q) \rightarrow \neg\Diamond(\neg P \wedge \neg Q)$	`I N /`
5. $\blacksquare P \rightarrow (\Diamond\neg P \rightarrow Q)$	`I N /`
6.$(\blacksquare P \vee \blacksquare Q) \rightarrow \blacksquare(P \vee Q)$	`I N /`
7.$(\blacksquare P \vee \blacksquare\neg P) \leftrightarrow \blacksquare(P \vee \neg P)$	`I N /`

(14×3 boda = 42 boda)

Zadatak 6.

Istinitosno se stablo kao metoda provjere valjanosti zaključka, valjanosti ili zadovoljivosti iskaza ili skupa iskaza ili kao metoda provjere istovrijednosti iskaza može koristiti i u predikatnoj logici. Postojećim pravilima za raščlambu iskaza iz iskazne logike, koja se upotrebljavaju na isti način, dodaju se pravila za univerzalni i egzistencijalni iskaz te za njihovu negaciju.

Pravilo za egzistencijalni iskaz: (oznaka u opravdanju: broj retka, ∃) kvantifikator se ispušta, a varijabla se supstituira predmetnom konstantom koja se ranije ne javlja u istoj grani stabla, npr.

$$\begin{array}{c} 1.\exists x Gx \checkmark \\ | \\ 2.Ga \end{array}$$

Pravilo za univerzalni iskaz: (oznaka u opravdanju: broj retka, ∀) kvantifikator se ispušta, a varijabla se supstituira proizvoljnom predmetnom konstantom, neovisno o tome javlja li se već ta predmetna konstanta u grani stabla u kojoj se isključuje kvantifikator. Dopušteno je isključiti univerzalni kvantifikator više puta u istoj grani. Npr.

$$\begin{array}{c} \forall x Fx \checkmark \\ | \\ Fa \end{array}$$

Pravila za negaciju univerzalnoga i egzistencijalnoga iskaza: (oznaka u opravdanju: broj retka, ¬∀ ili ¬∃) negacija se premješta neposredno iza kvantifikatora, a kvantifikator se promijeni. Npr.

$$\begin{array}{c} \neg\forall x Fx \checkmark \\ | \\ \exists x \neg Fx \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\exists x Fx \checkmark \\ | \\ \forall x \neg Fx \end{array}$$

1. Zadani su sljedeći iskazi: $\exists x Fx \vee \exists x Gx$ i $\exists x(Fx \vee Gx)$. Nadopunite istinitosno stablo iskazima s kvačicom ili bez nje, brojkama, križićima ili kružićima i, desno, opravdanjima, te odgovorite na pitanja. **Napomena:** boduju se samo potpuno ispravni redci (formula ili dvije formule uz opravdanje) i svaki potpuno ispravan redak donosi tri boda.

a)

1.	______________		
2.	______________		
3.	______________ ✓		$2, \neg\exists$
4.	________	________	________
5.	_____	_____	________
6.	________	________	________
7.	_____	_____	________
8.	_____	$\neg Gb$	________
9.	_____	_____	

b) Zaokružite točan odgovor:

Na temelju istinitosnoga stabla zaključujemo da iskaz $\exists x(Fx \vee Gx)$ `slijedi / ne slijedi` iz iskaza $\exists x Fx \vee \exists x Gx$.

Napomena: Odgovor se priznaje ako i samo ako je stablo točno riješeno.

2. a) Provjerite istinitosnim stablom slijedi li iz iskaza $\exists x(Fx \vee Gx)$ iskaz $\exists xFx \vee \exists xGx$.
Napomena: boduju se samo potpuno ispravni redci (formula ili dvije formule uz opravdanje) i svaki potpuno ispravan redak donosi tri boda.

1.	____________________		
2.	____________________		
3.	_______________		_____
4.	_______________ ✓		_____
5.	_______________		$2, \neg\vee$
6.	_______________ ✓		_____
7.	_______________		$1, \exists$
8.	_____	_____	_____
9.	_____	$\neg Fa$	_____
10.	_____	_____	_____
11.		_____	

b) Zaokružite točan odgovor:
Na temelju istinitosnoga stabla zaključujemo da iskaz $\exists xFx \vee \exists xGx$ `slijedi / ne slijedi` iz iskaza $\exists x(Fx \vee Gx)$.
Napomena: Odgovor se priznaje ako i samo ako je stablo točno riješeno.

c) Zaokružite točan odgovor:
Iskazi $\exists xFx \vee \exists xGx$ i $\exists x(Fx \vee Gx)$ `jesu / nisu` ekvivalentni.

Napomena: Odgovor se priznaje ako i samo ako su oba stabla točno riješena.

(23×3 boda = 69 bodova)

Zadatak 7.

a) Koristeći se samo osnovnim pravilima dopunite sljedeći dokaz formulama i, desno, potpunim opravdanjima. U opravdanjima upotrijebite 'pretp.' za 'pretpostavka', 'u' za 'uvođenje', 'i' za 'isključenje', 'op' za 'opetovanje', veznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, konstante a, b, c te kvantifikatore $\forall$, $\exists$ (npr. '$\wedge$u' za 'uvođenje konjunkcije'). **Napomena:** Boduju se samo potpuno ispravni redci (formula uz opravdanje i svaki potpuno ispravan redak donosi 3 boda).

1		________
2		________
3		________
4		________
5	$\neg Pc$	________
6		________
7		$\exists$i, 1, 2-6
8		________
9		________
10		________
11		________
12		________
13	$\neg Pa$	________
14		$\forall$u, 13, a
15		________
16		________
17	$\exists x Px \leftrightarrow \neg \forall x \neg Px$	___, 1-7, 8-16

Nadopunite sljedeće tvrdnje o svojstvima sustava prirodne dedukcije:

b) Ako su pretpostavke od kojih se pošlo u dokazivanju prirodnom dedukcijom istinite, istinit je i izvedeni iskaz. Iskaz koji je izveden bez pretpostavaka nije samo istinit, nego je i valjan, stoga je sustav prirodne dedukcije ______________.

c) Uvijek kada je zaključak valjan, postoji i dokaz deduktivnom metodom kojim je iz premisa u određenom broju koraka moguće izvesti konkluziju (zaglavak). Osim toga, svaki se valjani iskaz može dokazati kao poučak, stoga je sustav prirodne dedukcije ______________.

(19×3 boda = 57 bodova)