

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE

A kategorija

travanj 2024.

## BODOVI:

- POTPUNO TOČNO RJEŠENJE: 3 BODA\*
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD\*
- POGREŠNO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA\*

\*Osim ako je u uputi u zadatku navedeno drukčije.

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAKS. BODOVA
1.		6
2.		72
3.		96
<b>UKUPNO</b>		<b>174</b>

Vrijeme rješavanja testa: 3 sata

**Zadatak 1.**

Kao što je poznato, argument (zaključak) je valjan ako nije moguća situacija u kojoj su njegove premise istinite, a konkluzija neistinita. Što vrijedi za sljedeću definiciju valjanosti argumenata?

Argument (zaključak) je valjan ako nije moguća situacija u kojoj su njegove premise istinite.

Za sljedeće dvije tvrdnje potrebno je zaokružiti "Da" ako tvrdnja vrijedi, a u suprotnome "Ne".

- Preuska je.                      Da Ne
- Preširoka je.                      Da Ne

**(2 × 3 boda = 6 bodova)**

## Zadatak 2.

U ovome zadatku potrebno je odrediti istinitost ponuđenih formula u četirima prikazanim situacijama. Prvo ćemo definirati neke termine.

*Crna točka* je bilo koji crni ispunjeni kružić. Broj je crnih točaka po situaciji redom 7, 1, 3 i 5.

*Bijela točka* je bilo koji neispunjeni kružić. Broj je bijelih točaka po situaciji redom 1, 1, 4 i 5.

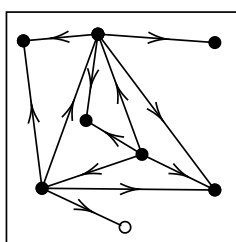
*Put* je bilo koji konačan niz točaka takav da za svaki član niza osim posljednjega postoji strelica koja počinje u tome članu niza i završava u idućem članu niza. Ista se točka može pojaviti na više mjesta u nizu i niz mora sadržavati barem dva člana (ne nužno različita).

Domenu (univerzalni skup, predmetno područje) pojedine situacije čine sve crne točke i sve bijele točke u toj situaciji. Primjerice, u prvoj situaciji domena ima 8 članova.

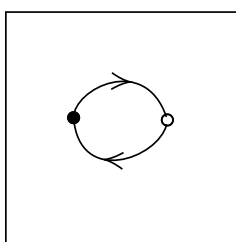
Za svaku situaciju i danu formulu potrebno je upisati **I**, **N** ili **?** ovisno o tome je li na temelju danih informacija moguće utvrditi da je formula u danoj situaciji istinita, neistinita ili nije moguće utvrditi istinitosnu vrijednost.

Korišten je sljedeći prijevod:

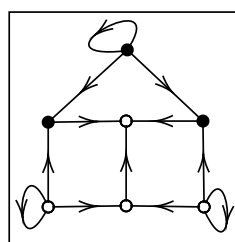
- $Bx \dots$  Objekt  $x$  jest bijela točka.
- $Sxy \dots$  Objekti  $x$  i  $y$  povezani su strelicom koja počinje u točki  $x$  i završava u točki  $y$ .
- $Pxy \dots$  Postoji put kojemu je prva točka  $x$ , a posljednja točka  $y$ .



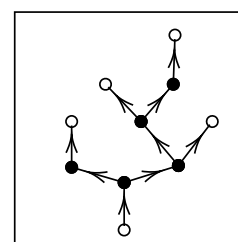
(a)



(b)



(c)



(d)

	Formula	(a)	(b)	(c)	(d)
i.	$\exists x \forall y \neg P y x$				
ii.	$\forall x \exists y \forall z ((S z x \rightarrow \neg S z y) \wedge (\neg S z y \rightarrow S z x))$				
iii.	$\exists x \exists y \exists z \exists u \neg ((S x y \wedge S z u) \rightarrow \neg S y z)$				
iv.	$\forall x \forall y \forall z ((B x \wedge B y \wedge \forall u ((P u x \vee P u y) \rightarrow P u z)) \rightarrow B z)$				
v.	$\forall x (\forall y P y x \rightarrow B x)$				
vi.	$\forall x \exists y (B y \wedge P y x \wedge \forall z ((B z \wedge P z x) \rightarrow P z y))$				
vii.	$\forall x \forall y \forall z (P x z \vee \neg (P x y \vee P y x))$				
viii.	$\forall x \forall y (\neg P x y \rightarrow (\neg P y x \rightarrow (\neg P x y \rightarrow P y x)))$				
ix.	$\forall x (\neg \exists u S x u \vee \exists y \exists z (S x y \wedge S x z))$				

*Bodovanje.* Svaki točan odgovor nosi 2 boda, izostanak odgovora nosi 1 bod, a inače odgovor nosi 0 bodova.

(36 × 2 boda = 72 boda)

**Zadatak 3.** *Gospodin Blobby čitao je Vrata Percepcije Aldousa Huxleya. Pročitao je da određena psihoaktivna sredstva dovode do percepcije svijeta u kojoj ne sudjeluje tzv. simbolički um. Ta sredstva, tvrdi autor, stoga dovode do direktnije percepcije vanjskoga svijeta, neopterećene rigidnošću pojmova ili logičkim strukturama. Zainteresiran, Gospodin Blobby odlučio je isprobati ta sredstva. Nažalost, doživio je nuspojavu s kojom, umjesto nestanka simboličkoga uma, simbolički um potpuno preuzima kontrolu nad misaonim životom. Gospodin Blobby sada može razmišljati samo o simbolima, i to samo pomoću simbola. Gospodin Blobby odlučio se pomiriti sa sudbinom i raditi jedino što može raditi: zaključivati o logičkim simbolima koristeći se logičkim simbolima.*

U ovome zadatku uvodimo dvije estetske promjene u jezik logike prvoga reda:

- Uobičajeno se dopušta da su varijable, konstante i pseudokonstante proizvoljna slova abecede uz opcionalne indekse i superskripte. Sada je dopušten i bilo koji simbol koji sadržava obrub. Primjerice,  $\textcircled{a}$ ,  $\textcircled{\neg}$  i  $\textcircled{x_1^2}$  dopušteni su simboli za varijable i (pseudo)konstante. Motivacija za to jest što je sadržaj argumenata (zaključaka) u ovome zadatku moguće shvatiti kao tvrdnje o logičkim veznicima na način da je primjerice  $\textcircled{\neg}$  konstanta koju asociiramo uz negaciju.
- Koristimo se relacijskim simbolom  $=$ , ali ne s ciljem da ga se interpretira kao binarnu relaciju identiteta. Koristimo se njime kao oznakom jednoga kvaternarnog (četveromjesnog) relacijskog simbola. Osim toga, nećemo pisati  $= xyzw$ , već  $xyz = w$ . Imajući na umu prethodnu točku, jedan mogući izraz bit će  $x \textcircled{\vee} y = \textcircled{\top}$ , što je i motivacija za ovu konvenciju.

Nije obvezno koristiti se navedenim estetskim promjenama u rješenjima; umjesto  $xyz = w$  može se pisati primjerice  $Rxyzw$ , a sve novouvedene simbole dopušteno je zamijeniti uobičajenim simbolima (tako  $x \textcircled{\vee} \textcircled{\top} = \textcircled{\top}$  može biti zapisano primjerice kao  $Rxcdd$ ). Neovisno o tome koja se notacija odabere, rješenje ni na koji način ne ovisi o tome da se, primjerice, o simbolu  $\textcircled{\neg}$  razmišlja kao o negaciji. Nova notacija samo je potencijalno korisna za vizualizaciju logičkoga slijeda.

Prvo navodimo premise. Premise su jednake u svim varijantama zadatka.

1.  $\forall \textcircled{0} \forall x \forall y \exists z x \textcircled{0} y = z$
2.  $\forall x \forall y x \textcircled{\ell} y = x$
3.  $\forall x \forall y (x \textcircled{\neg} y = \textcircled{\top} \leftrightarrow \neg x \textcircled{\ell} y = \textcircled{\top})$
4.  $\forall x \forall y (x \textcircled{\vee} y = \textcircled{\top} \leftrightarrow (x \textcircled{\ell} y = \textcircled{\top} \vee y \textcircled{\ell} x = \textcircled{\top}))$
5.  $\forall \textcircled{0_1} \forall \textcircled{0_2} \forall \textcircled{0_3} \exists \textcircled{0_4} \forall x \forall y (x \textcircled{0_4} y = \textcircled{\top} \leftrightarrow \exists u \exists v ((x \textcircled{0_1} y = u \wedge x \textcircled{0_2} y = v) \wedge u \textcircled{0_3} v = \textcircled{\top}))$

Varijante zadatka:

1. (96 bodova) Napisati izvod formule  $\exists \textcircled{0} \forall x \forall y x \textcircled{0} y = \textcircled{\top}$ .
2. (48 bodova) Napisati izvod formule  $\forall x \forall z \forall w (\exists y ((x \textcircled{\neg} w = \textcircled{\top} \leftrightarrow y \textcircled{\ell} w = \textcircled{\top}) \wedge (z \textcircled{\ell} w = \textcircled{\top} \leftrightarrow y \textcircled{\neg} w = \textcircled{\top})) \rightarrow (x \textcircled{\ell} w = \textcircled{\top} \leftrightarrow z \textcircled{\ell} w = \textcircled{\top}))$ .
3. (24 boda) Napisati izvod formule  $\forall z (\exists y (\textcircled{\top} \textcircled{\neg} y = z \rightarrow \forall y (\forall w y \textcircled{\ell} w = \textcircled{\top} \rightarrow y \textcircled{\vee} z = \textcircled{\top})))$ .

Potrebno je odabrati jednu od ponuđenih varijanti zadatka. Boduje se samo jedno rješenje (jedna dedukcija). Moguća su potpuno točna rješenja koja imaju sljedeći broj redaka: 61 redak za prvu varijantu, 36 redaka za drugu varijantu i 16 redaka za treću varijantu. Broj redaka u rješenju ne utječe na broj bodova.

Postoje različite konvencije oko detalja u prirodnoj dedukciji. Rješenja moraju biti u skladu s pravilima i konvencijama u prilogu (na posljednjim stranicama testa).

Rješenje je potrebno napisati na prazne papire **koji su zaklamani na kraju testa prije priloga**. Rješenja napisana na drugim mjestima ne prihvaćaju se. U rješenju nije potrebno navesti prvih pet redaka (tj. nije potrebno prepisivati ranije navedene premise).

(najviše 96 bodova)

*Bodovanje.* Ukratko, **boduju se samo točna rješenja i rješenja koja su vrlo bliska nekomu točnom rješenju**, pri čemu točnost opravdanja ne ulazi u taj uvjet za bodovanje rješenja. Precizna pravila bodovanja:

- U slučaju izostanka rješenja zadatak nosi 10 bodova.
- Inače, ako dedukcija nije u potpunosti točna, mora se moći popraviti. Popravljanje se mora moći izvesti uz najviše četiri promjene formula i neograničen broj promjena opravdanja.
- *Promjena formule* umetanje je retka s novom formulom ili izmjena formule u postojećemu retku u dedukciji. Nazovimo sve takve retke modificiranima. Popravljanje dedukcije, uz već navedeno, ne smije rezultirati trima uzastopnim modificiranim recima. Postojanje i točnost opravdanja ne utječu na ovaj uvjet.
- *Promjena opravdanja* dodavanje je ili ispravljanje opravdanja u nekome retku u odnosu na početnu dedukciju. Smatra se da je opravdanje u modificiranome retku uvijek pogrešno (treba popravljati). Smatra se da opravdanja referiraju na stanje prije popravljivanja.
- Ako je maksimalan predviđen broj bodova  $M$ , minimalan broj potrebnih promjena formule  $F$ , a opravdanja  $\mathcal{O}$ , takvo rješenje zadatka nosi  $M - 3F^2 - \mathcal{O}$  bodova.
- Veličina dedukcije i (ne)postojanje redaka koji se ne koriste poslije u dedukciji ne utječu (izravno) na broj bodova.

**Rješenje zadatka 3.**

### Rješenje zadatka 3.

**Rješenje zadatka 3.**



**Rješenje zadatka 3.**

Rješenje zadatka 3.

Rješenje zadatka 3.

## PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (1/2)

- Dedukcija može biti izvod ili dokaz. Izvod počinje s jednom ili više (glavnih) premisa odvojenih od ostatka izvoda vodoravnom crtom. Dokaz nema (glavnih) premisa, što povlači da dokaz mora započeti podizvodom. Primjeri su na dnu sljedeće stranice.
- Opravdanja se sastoje od triju podataka: simbol veznika, slovo u ili i (za uvođenje/isključenje) te jedan ili više brojeva ili brojevnih raspona. Ta tri podatka mogu biti odijeljena razmakom, zarezom, kosom crtom ili kako drukčije. Poredak tih triju podataka proizvoljan je (to ne znači da je poredak brojeva proizvoljan). Iznimno, reiteracija (opetovanje) ne sadržava slovo u ili i.
- Kod nekih je pravila poredak premisa o kojima ovise proizvoljan, što je signalizirano **zvjezdicom**. Kod takvih se pravila iznimno dopušta i proizvoljan poredak u zapisu brojeva u opravdanju. Primjerice, kod uvođenja konjunkcije redak rednoga broja  $k$  mogao se pojaviti prije retka rednoga broja  $j$ , a u opravdanju je u oba slučaja moglo pisati  $\wedge u, j, k$  ili  $\wedge u, k, j$ . U sva četiri slučaja pravilo zovemo  $\wedge u$ .
- Tri točkice signaliziraju da su na njihovu mjestu možda još neki redci osim upisanih.
- Svaka pojava veznika, osim glavnoga veznika, mora imati vlastite zagrade:  $A \wedge (B \wedge C)$  i  $(A \wedge B) \wedge C$  pravilni su zapisi, no  $A \wedge B \wedge C$  nije.

Uvođenje konjunkcije. \*

j	A	
	⋮	
k	B	
	⋮	
	$A \wedge B$	$\wedge u, j, k$

Uvođenje disjunkcije.

j	A		j	B	
	⋮			⋮	
	$A \vee B$	$\vee u, j$		$A \vee B$	$\vee u, j$

Uvođenje kondicionala.

j	A	pretp.	
	⋮		
k	B		
	$A \rightarrow B$	$\rightarrow u, j - k$	

Uvođenje bikondicionala.

j	A	pretp.	
	⋮		
k	B		
m	B	pretp.	
	⋮		
n	A		
	$A \leftrightarrow B$	$\leftrightarrow u, j - k, m - n$	

Uvođenje kontradikcije. \*

j	A	
	⋮	
k	$\neg A$	
	⋮	
	$\perp$	$\perp u, j, k$

Uvođenje negacije.

j	A	pretp.
	⋮	
k	$\perp$	
	$\neg A$	$\neg u, j - k$

Isključenje konjunkcije.

j	$A \wedge B$			j	$A \wedge B$	
	⋮				⋮	
	A	$\wedge i, j$			B	$\wedge i, j$

Isključenje disjunkcije.

e	$A \vee B$	
	⋮	
j	A	pretp.
	⋮	
k	C	
m	B	pretp.
	⋮	
n	C	
	C	$\vee i, e, j - k, m - n$

Isključenje kondicionala. \*

j	$A \rightarrow B$	
	⋮	
k	A	
	⋮	
	B	$\rightarrow i, j, k$

Isključenje bikondicionala. \*

j	$A \leftrightarrow B$			j	$A \leftrightarrow B$	
	⋮				⋮	
k	A			k	B	
	⋮				⋮	
	B	$\leftrightarrow i, j, k$			A	$\leftrightarrow i, j, k$

Isključenje kontradikcije.

j	$\perp$	
	⋮	
	A	$\perp i, j$

Isključenje negacije.

j	$\neg \neg A$	
	⋮	
	A	$\neg i, j$

Reiteracija (opetovanje).

j	A	
	⋮	
	A	re., j (ili op., j)

**PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (2/2)**

- U nastavku navodimo pravila za kvantifikatore (količitelje). Koristimo se logikom prvoga reda bez funkcijskih simbola. **Na dnu je primjer dokaza.**
- Neka je  $A$  formula koja možda sadržava pojave (javljanja, nastupe) neke varijable  $x$ .
  - Označimo s  $A(t/x)$  formulu jednaku formuli  $A$ , osim što je **svaka** slobodna pojava varijable  $x$  u  $A$  zamijenjena pojavom (pseudo)konstante  $t$ .
- Neka je  $A$  formula koja možda sadržava pojave neke (pseudo)konstante  $t$ .
  - Označimo s  $A(x/t)$  formulu jednaku formuli  $A$ , osim što je **svaka** pojava (pseudo)konstante  $t$  u  $A$  zamijenjena pojavom varijable  $x$ .
  - Označimo s  $A(x//t)$  formulu jednaku formuli  $A$ , osim što je **nula ili više** pojava (pseudo)konstante  $t$  u  $A$  zamijenjeno pojavom varijable  $x$ .

Uvođenje egzistencijalnoga kvantifikatora.

j	A	
	⋮	
	∃xA(x//t)	∃u, j

Ako formula  $A$  već sadržava kvantifikatore nad varijablom  $x$ , pojave (pseudo)konstante  $t$  u formuli  $A$  ne smiju biti u doseg u tih kvantifikatora.

Uvođenje univerzalnoga kvantifikatora.

j	A	
	⋮	
	∀xA(x/t)	∀u, j

Pseudokonstanta  $t$  pritom se ne smije pojavljivati u (u retku  $j$ ) vrijedećim pretpostavkama. Ako formula  $A$  već sadržava kvantifikatore nad varijablom  $x$ , pojave pseudokonstante  $t$  u formuli  $A$  ne smiju biti u doseg u tih kvantifikatora.

Isključenje egzistencijalnoga kvantifikatora.

j	∃xA	
	⋮	
k	A(t/x)	pretp.
	⋮	
m	B	
	B	∃i, j, k – m

Pseudokonstanta  $t$  ne smije se pojavljivati u formuli  $B$ , u (u retku  $k$ ) vrijedećim pretpostavkama (osim, naravno, pretpostavke  $A(t/x)$ ), ni u formuli  $B$ .

Isključenje univerzalnoga kvantifikatora.

j	∀xA	
	⋮	
	A(t/x)	∀i, j

Ovo pravilo nema dodatnih ograničenja,  $t$  je bilo kakva (pseudo)konstanta.

Dajemo primjer dokaza da je formula  $(\exists xRxx \rightarrow \exists x\exists yRxy) \vee Pc$  teorem. Dokaz je duži no što je potrebno kako bismo demonstrirali primjenu svih pravila za kvantifikatore.

1	∃xRxx	pretp.
2	Raa	pretp.
3	∃yRay	∃u, 2
4	∃x∃yRxy	∃u, 3
5	∃x∃yRxy	∃i, 1, 2 – 4
6	∃xRxx → ∃x∃yRxy	→u, 1 – 5
7	(∃xRxx → ∃x∃yRxy) ∨ Pb	∨u, 6
8	∀z((∃xRxx → ∃x∃yRxy) ∨ Pz)	∀u, 7
9	(∃xRxx → ∃x∃yRxy) ∨ Pc	∀i, 8

Dajemo primjer izvoda formule  $\neg\neg Pc$  iz formula  $Pc$  i  $\neg Pd$  (naravno, točan je i sličan izvod bez druge pretpostavke).

1	Pc	pretp.
2	¬Pd	pretp.
3	¬Pc	pretp.
4	⊥	⊥u, 1, 3
5	¬¬Pc	¬u, 3 – 4