DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE - RJEŠENJA:

NAPOMENA: U zadatcima **1, 2, 4, 5, 6 i 7 a)** moguće je više točnih rješenja. U rješenjima je navedeno po jedno moguće rješenje, stoga je sva rješenja potrebno provjeriti.

Zadatak 1.
a)

1. $\exists x Jx$
2. $\exists x(Jx \wedge \forall y(Jy \rightarrow y = x))$
3. $\forall x \forall y \forall z((Jx \wedge Jy \wedge Jz) \rightarrow (z = x \vee z = y \vee x = y))$
4. $\exists x \exists y \exists z(Jx \wedge Jy \wedge Jz \wedge \forall w(Jw \rightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z)) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$
5. $\forall x(Jx \rightarrow \exists y(Rxy \wedge \forall z(Rxz \rightarrow z = y)))$

Napomena: moguća su alternativna rješenja. Sva se točna rješenja priznaju. (5 $\times$ 3 boda = 15 bodova)
b) 1, 2, 3, 5 (3 boda)
Ukupno 18 bodova.

Zadatak 2.
Napomena: svaki točan odgovor zajedno s odgovarajućim protuprimjerom (ako je potreban) donosi 6 bodova. U rješenjima su navedeni mogući protuprimjeri, ali priznaju se i svi ostali odgovarajući protuprimjeri.
1. NE; protuprimjer: neka su predikati Fx: 'x je crn' i Gx: 'x je bijel', a domena: šahovske figure. Iz 'Svaka je figura crna ili bijela' ne slijedi 'Svaka je figura crna ili svaka je figura bijela'.
2. DA
3. DA
4. NE; protuprimjer: neka je predikat 'x voli y', a domena: ljudi: iz 'Svatko nekoga voli.' ne slijedi 'Netko voli svakoga'.
(4 $\times$ 6 bodova = 24 boda)

Zadatak 3.
N, I, M, I, M, N, I, I, M, M
(10 $\times$ 3 boda = 30 bodova)

Zadatak 4.
a) DA (3 boda)
b) DA (3 boda)
c) Slijedi jedno moguće rješenje. Priznaju se sva točna rješenja koja odgovaraju zadanim uputama.
1.
    1. $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$
    2. $\neg Q$
    3. P

(3 boda)

2.
1. $\neg P \vee Q$
2. $P \vee \neg Q$
3. $\neg Q$
4. P

(3 boda)

3. Prva primjena. Izabrane formule:
1. $\neg P \vee Q$
2. $\neg Q$

(3 boda)

Formule u skupu nakon primjene: $\{\neg P \vee Q,\ P \vee \neg Q,\ \neg Q,\ P,\ \neg P\}$

Druga primjena. Izabrane formule:
1. $\neg P$
2. P

(3 boda)

4. DA (3 boda) Odgovor se priznaje ako i samo ako je postupak provjere ispravno proveden.

Ukupno 21 bod.

Zadatak 5.

a) DA (3 boda)

b) (0, 2), (1, 1) (3 boda)

c) 1. NE, $Tau_\vee$ i $Tau_\rightarrow$;

2. DA, primjer: igrač A u prvome potezu odabire formulu P, igrač B u drugome potezu odabire formulu P. Budući da je $P \leftrightarrow P$ tautologija, igrač B je pobjednik (priznaju se i sva ostala točna rješenja);

3. DA, jedna moguća formula nakon desetoga poteza:

$(((((((((P \leftrightarrow \neg P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P)$;

4. $Tau_\wedge$;

5. NE;

6. $Tau_\vee$ i $Tau_\rightarrow$

(6 × 3 boda)

Ukupno 24 boda.

Zadatak 6.

a) 1. $\forall x((N_0x \vee N_1x \vee ... \vee N_8x) \rightarrow \neg Mx)$ (3 boda)

2. $\forall x(N_1x \rightarrow \exists z(Sxz \wedge Mz \wedge \forall y((Sxy \wedge My) \rightarrow y = z)))$ (3 boda)

b)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1		1	0	1	1	1	0	0
3	1	1	1	0	2		3	2	1
4	1	1	2	1	3			3	
5	2		3		2	2	4		3
6	2		3	1	1	0	2		2
7	2	2	1	0	0	0	1	1	1
8		1	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	0	0	0	0	0	0	0

(3 boda)

c)

1	$N_1(1,1)$	pretp.
2	$\neg M(2,1)$	pretp.
3	$\neg M(1,2)$	pretp.
4	$\forall x(S((1,1)x) \to (x = (2,1) \vee x = (1,2) \vee x = (2,2)))$	pretp.
5	$\forall x \forall y(x = y \to (Mx \to My))$	pretp.
6	$\forall x(N_1 x \to \exists z(Sxz \wedge Mz \wedge \forall y((Sxy \wedge My) \to y = z)))$	pretp.
7	$N_1(1,1) \to \exists z(S(1,1)z \wedge Mz \wedge \forall y((S(1,1)y \wedge My) \to y = z))$	6, $\forall$i
8	$\exists z(S(1,1)z \wedge Mz \wedge \forall y((S(1,1)y \wedge My) \to y = z))$	1,7, $\to$i
9	$S(1,1)c \wedge Mc \wedge \forall y((S(1,1)y \wedge My) \to y = c))$	pretp., c
10	$S(1,1)c$	9, $\wedge$i
11	Mc	9, $\wedge$i
12	$S((1,1)c) \to (c = (2,1) \vee c = (1,2) \vee c = (2,2))$	4,$\forall$i
13	$\forall y(c = y \to (Mc \to My))$	5, $\forall$i
14	$c = (2,1) \vee c = (1,2) \vee c = (2,2)$	10,12, $\to$i
15	$c = (2,1)$	pretp.
16	$c = (2,1) \to (Mc \to M(2,1))$	13, $\forall$i
17	$Mc \to M(2,1)$	15,16, $\to$i
18	$M(2,1)$	11,17, $\to$i
19	$M(2,2)$	2,18, ktd.
20	$c = (1,2)$	pretp.
21	$c = (1,2) \to (Mc \to M(1,2))$	13, $\forall$i
22	$Mc \to M(1,2)$	20,21, $\to$i
23	$M(1,2)$	11,22, $\to$i
24	$M(2,2)$	3,23, ktd.
25	$c = (2,2)$	pretp.
26	$c = (2,2) \to (Mc \to M(2,2))$	13, $\forall$i
27	$Mc \to M(2,2)$	11,26 $\to$i
28	$M(2,2)$	11,27, $\to$i
29	$M(2,2)$	14,15-19,20-24,25-28, $\vee$i
30	$M(2,2)$	8,9-29, $\exists$i

Napomena: podzadatak **c)** ukupno nosi 75 bodova. Boduje se po dijelovima ovisno o načinu rješavanja. U predloženome je rješenju korišten skraćeni oblik isključenja disjunkcije i konjunkcije s više od dva konjunkta ili disjunkta (prema napomeni u tekstu zadatka).

Ukupno 84 boda.

Zadatak 7.

1	$\exists x Fx \lor \exists x Gx$	pretp.
2	$\exists x Fx$	pretp.
3	Fa	pretp., a
4	$Fa \lor Ga$	3, ∨u
5	$\exists x(Fx \lor Gx)$	4, ∃u
6	$\exists x(Fx \lor Gx)$	2,3-5 ∃i
7	$\exists x Gx$	pretp.
8	Ga	pretp., a
9	$Fa \lor Ga$	8, ∨u
10	$\exists x(Fx \lor Gx)$	9, ∃u
11	$\exists x(Fx \lor Gx)$	7,8-10 ∃i
12	$\exists x(Fx \lor Gx)$	1,2-6,7-11 ∨i
13	$\exists x(Fx \lor Gx)$	pretp.
14	$Fa \lor Ga$	pretp., a
15	Fa	pretp.
16	$\exists x Fx$	16, ∃u
17	$\exists x Fx \lor \exists x Gx$	17, ∨u
18	Ga	pretp.
19	$\exists x Gx$	19, ∃u
20	$\exists x Fx \lor \exists x Gx$	20, ∨u
21	$\exists x Fx \lor \exists x Gx$	15,16-18,19-21, ∨i
22	$\exists x Fx \lor \exists x Gx$	14,15-22, ∃i
23	$\exists x(Fx \lor Gx) \leftrightarrow (\exists x Fx \lor \exists x Gx)$	1-12,13-22, ↔u

(16 × 3 boda = 48 bodova)