DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE

21. listopada 2020.

BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA*
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD*
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA*

*Osim ako je u uputi u zadatku navedeno drugačije.

A KATEGORIJA

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAX BODOVA (A)
1.		15
2.		62
3.		90
UKUPNO		**167**

Vrijeme rješavanja testa: 90 minuta

Zadatak 1.

U donjim je zaključcima potrebno pronaći formulu u jeziku iskazne logike, tj. logike sudova, koja nedostaje. Prilikom zapisa tražene formule koristite sljedeći prijevod:

- I ... Istraživanja su urotnički falsificirana.
- N ... Nacionalizam je koreliran s gustoćom sive materije u području PCC-a.

Nova premisa, nazovimo ju X, mora ispunjavati sljedeće uvjete:

1. ne sadrži druge simbole osim I, N, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ te zagrada;
2. zaključak s dodanom formulom mora biti valjan;
3. ne smije postojati neka druga formula Y koja također ispunjava uvjete (1.) te (2.), te uz to Y logički slijedi iz X, a X logički ne slijedi iz Y;

Na primjer, formula N u prvom podzadatku ne bi ispunila sve uvjete (1)–(3).

U svim podzadacima postoji više rješenja, ali dovoljno je napisati jedno. Veličina odabrane formule ne utječe na bodovanje.

1. Ako je nacionalizam koreliran s gustoćom sive materije u području PCC-a, istraživanja su urotnički falsificirana.
   Nedostajuća premisa (formula): ______________________

   Konkluzija: Istraživanja su urotnički falsificirana.

2. Nacionalizam je koreliran s gustoćom sive materije u području PCC-a.

   Nedostajuća premisa (formula): ______________________

   Konkluzija: Istraživanja su urotnički falsificirana.

3. Nacionalizam je koreliran s gustoćom sive materije u području PCC-a samo ako istraživanja nisu urotnički falsificirana.
   Nedostajuća premisa (formula): ______________________

   Konkluzija: Nacionalizam nije koreliran s gustoćom sive materije u području PCC-a ako i samo ako su istraživanja urotnički falsificirana.

4. Istraživanja su urotnički falsificirana premda istraživanja nisu urotnički falsificirana.

   Nedostajuća premisa (formula): ______________________

   Konkluzija: Nacionalizam je koreliran s gustoćom sive materije u području PCC-a ako su istraživanja urotnički falsificirana.

5. Istraživanja nisu urotnički falsificirana.

   Nedostajuća premisa (formula): ______________________

   Konkluzija: Samo ako su istraživanja urotnički falsificirana a nacionalizam nije koreliran s gustoćom sive materije u području PCC-a, vrijedi sljedeće: ako je nacionalizam koreliran s gustoćom sive materije u području PCC-a, istraživanja su urotnički falsificirana.

(5×3 boda = 15 bodova)

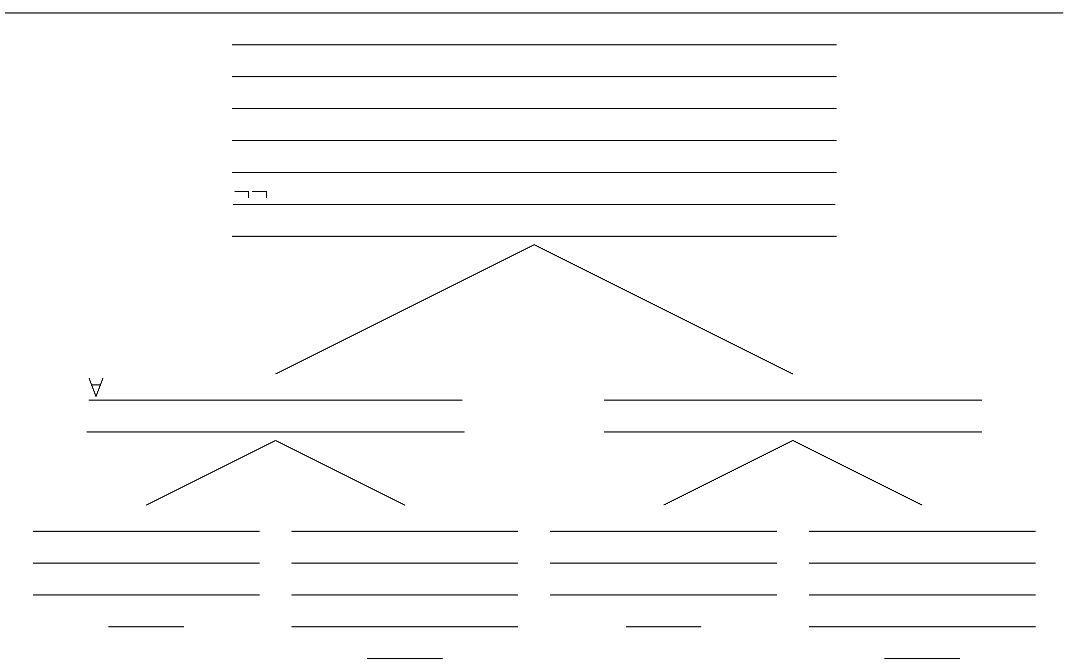
Zadatak 2.

Istinitosnim (semantičkim) stablom provjerite je li

$$\forall x(\forall z Rxz \to \neg\forall z Szx) \to (\forall y \forall w Syw \to \forall x \forall y \neg(\forall w Ryw \lor \forall w Rxw))$$

valjan iskaz. Na crte smijete upisivati samo formule i/ili simbole ✓, ◦ i ×.

Na iskaze oblika $\neg\forall\mathbf{x}\phi$ izravno primjenjujte pravila, tj. ne prevodite ih prethodno u iskaze oblika $\exists\mathbf{x}\neg\phi$. Dozvoljeno je pisanje opravdanja, ali se ne boduje niti ikako može utjecati na dobiveni broj bodova.



Iskaz ______ valjan.

Bodovanje: potpuni izostanak rješenja nosi 10 bodova. Inače:

Neka je S skup svih ispravnih popunjenja zadanoga stabla. Definiramo T kao broj polja u stablu u kojima se sadržaj toga polja u vašem rješenju (uključujući kvačicu) potpuno poklapa sa sadržajem istoga polja u rješenju R iz S, za ono rješenje R iz S za koje je taj broj najveći. Broj bodova za vaše rješenje stabla jednak je udvostručenomu broju T. Točan odgovor na pitanje o valjanosti iskaza nosi dodatna 2 boda ako i samo ako je cijelo stablo ispravno ispunjeno.

(31×2 boda = 62 boda)

Zadatak 3. Riješite jedan od sljedećih zadataka.

Boduje se samo jedno rješenje (jedna dedukcija). Kako postoje različite konvencije oko detalja u prirodnoj dedukciji, dobro proučite pravila u prilogu (na posljednjim stranicama testa).

1. (90 bodova) Napišite izvod formule $\exists x(Rax \leftrightarrow \neg Rbx)$ iz premisa $\forall x Rax \lor \neg\exists x Rax$ te $\neg(\neg\exists x \neg Rbx \lor \neg\exists x Rbx)$.
2. (30 bodova) Napišite izvod formule E iz premisa $(\neg D \to \neg B) \to E$ te $(A \lor B) \leftrightarrow (C \land D)$.

Uočite da dedukcije nose različit broj bodova. Ako napišete rješenja za obje ponuđene dedukcije, naznačite za koje rješenje (koju dedukciju) želite da se boduje.

Rješenje pišite na prazne papire **koji su zaklamani na kraju testa prije priloga**. Rješenja napisana na drugim mjestima ne prihvaćaju se.

(30 bodova ili 90 bodova)

Bodovanje. Ukratko, **boduju se samo točna rješenja i rješenja koja su vrlo bliska nekom točnom rješenju**, pri čemu ispravnost opravdanja ne ulazi u taj uvjet za bodovanje rješenja. Precizna pravila bodovanja:

- U slučaju izostanka rješenja, zadatak nosi 10 bodova.
- Inače, kako biste dobili bodove, ako dedukcija nije u potpunosti točna, mora se moći popraviti. Popravljanje se mora moći izvesti uz najviše četiri (prva varijanta) odnosno najviše tri (druga varijanta) *promjene formula* i neograničen broj *promjena opravdanja*.
- *Promjena formule* je umetanje retka s novom formulom ili izmjena formule u postojećem retku u dedukciji. Nazovimo sve takve retke modificiranima. Popravljanje dedukcije, uz već navedeno, ne smije rezultirati s tri uzastopna modificirana retka. Postojanje i ispravnost opravdanja ne utječu na ovaj uvjet.
- *Promjena opravdanja* je dodavanje ili ispravljanje opravdanja u nekom retku, u odnosu na početnu dedukciju. Smatra se da je opravdanje u modificiranom retku uvijek pogrešno (traži promjenu).
- Smatra se da brojevi u opravdanjima referiraju na stanje prije popravljanja (nemojte pokušavati pogoditi ispravne brojeve redaka nakon ispravljanja). Ako je maksimalan predviđen broj bodova M, minimalan broj potrebnih promjena formule f, a opravdanja o, takvo rješenje zadatka nosi $M - 3f^2 - o$ bodova.
- Veličina dedukcije i (ne)postojanje redaka koji se ne koriste kasnije u dedukciji ne utječu (izravno) na broj bodova.

Rješenje Zadatka 3.

Rješenje Zadatka 3.

PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (1/2)

- Dedukcija može biti izvod ili dokaz. Izvod počinje jednom ili više (glavnih) premisa odvojenih od ostatka izvoda vodoravnom crtom. Dokaz nema (glavnih) premisa, što povlači da dokaz mora započeti podizvodom. Primjere možete vidjeti na dnu sljedeće stranice.
- Opravdanja se sastoje od tri podatka: simbol veznika, slovo `u` ili `i` (za uvođenje/isključenje), te jedan ili više brojeva ili brojevnih raspona. Ta tri podatka mogu biti odijeljena razmakom, zarezom, kosom crtom ili nekako drugačije. Poredak ta tri podatka proizvoljan je (to ne znači da je poredak brojeva proizvoljan). Iznimno, reiteraicija (opetovanje) ne sadrži slovo `u` ili `i`.
- Kod nekih je pravila poredak premisa iz kojih slijede proizvoljan, što je signalizirano **zvjezdicom**. Kod takvih se pravila iznimno dopušta i proizvoljan poredak u zapisu brojeva u opravdanju. Primjerice, kod uvođenja konjunkcije, redak rednog broja k mogao se pojaviti prije retka rednog broja j, a u opravdanju je u oba slučaja moglo pisati $\wedge u, j, k$ ili $\wedge u, k, j$. U sva četiri slučaja, pravilo zovemo ∧u.
- Tri točkice signaliziraju da su na njihovu mjestu možda još neki redci osim upisanih.

Uvođenje konjunkcije. *

j	A	
	⋮	
k	B	
	⋮	
	$A \wedge B$	∧u, j, k

Uvođenje disjunkcije.

j	A	
	⋮	
	$A \vee B$	∨u, j

j	B	
	⋮	
	$A \vee B$	∨u, j

Uvođenje kondicionala.

j	│ A	pretp.
	│ ⋮	
k	│ B	
	$A \to B$	→u, j–k

Uvođenje bikondicionala.

j	│ A	pretp.
	│ ⋮	
k	│ B	
m	│ B	pretp.
	│ ⋮	
n	│ A	
	$A \leftrightarrow B$	↔u, j–k, m–n

Uvođenje kontradikcije. *

j	A	
	⋮	
k	$\neg A$	
	⋮	
	$\bot$	⊥u, j, k

Uvođenje negacije.

j	│ A	pretp.
	│ ⋮	
k	│ $\bot$	
	$\neg A$	¬u, j–k

Isključenje konjunkcije.

j	$A \wedge B$	
	⋮	
	A	∧i, j

j	$A \wedge B$	
	⋮	
	B	∧i, j

Isključenje disjunkcije.

e	$A \vee B$	
	⋮	
j	│ A	pretp.
	│ ⋮	
k	│ C	
m	│ B	pretp.
	│ ⋮	
n	│ C	
	C	∨i, e, j–k, m–n

Isključenje kondicionala. *

j	$A \to B$	
	⋮	
k	A	
	⋮	
	B	→i, j, k

Isključenje bikondicionala. *

j	$A \leftrightarrow B$	
	⋮	
k	A	
	⋮	
	B	↔i, j, k

j	$A \leftrightarrow B$	
	⋮	
k	B	
	⋮	
	A	↔i, j, k

Isključenje kontradikcije.

j	$\bot$	
	⋮	
	A	⊥i, j

Isključenje negacije.

j	$\neg\neg A$	
	⋮	
	A	¬i, j

Reiteracija (opetovanje).

j	A	
	⋮	
	A	re., j (ili op., j)

PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (2/2)

- U nastavku navodimo pravila za kvantifikatore (količitelje). Koristimo logiku prvog reda bez funkcijskih simbola. Pravila su (zbog preciznosti) opisana apstraktnije nego što ste možda učili u školi, no suštinski su to ista pravila. **Na dnu je primjer dokaza.**
- Neka je A formula koja možda sadrži pojave (javljanja, nastupe) neke varijable x.
  - Označimo s $A(t/x)$ formulu jednaku formuli A, osim što je **svaka** slobodna pojava varijable x u A zamijenjena pojavom (pseudo)konstante t.
- Neka je A formula koja možda sadrži pojave neke (pseudo)konstante t.
  - Označimo s $A(x/t)$ formulu jednaku formuli A, osim što je **svaka** pojava (pseudo)konstante t u A zamijenjena pojavom varijable x.
  - Označimo s $A(x//t)$ formulu jednaku formuli A, osim što je **nula ili više** pojava (pseudo)konstante t u A zamijenjeno pojavom varijable x.

Uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora.

j	A	
	$\vdots$	
	$\exists x A(x//t)$	$\exists$u, j

Ako formula A već sadrži kvantifikatore nad varijablom x, pojave t u A ne smiju biti u dosegu tih kvantifikatora.

Uvođenje univerzalnog kvantifikatora.

j	A	
	$\vdots$	
	$\forall x A(x/t)$	$\forall$u, j

Pseudokonstanta t se pritom ne smije javljati u (u retku j) vrijedećim pretpostavkama. Ako formula A već sadrži kvantifikatore nad varijablom x, pojave pseudokonstante t u A ne smiju biti u dosegu tih kvantifikatora.

Isključenje egzistencijalnog kvantifikatora.

j	$\exists x A$	
	$\vdots$	
k	| $A(t/x)$	pretp.
	| $\vdots$	
m	| B	
	B	$\exists$i, j, k–m

Pseudokonstanta t se ne smije javljati u formuli koju isključujemo, u (u retku k) vrijedećim pretpostavkama (osim, naravno, pretpostavke $A(t/x)$), niti u formuli B.

Isključenje univerzalnog kvantifikatora.

j	$\forall x A$	
	$\vdots$	
	$A(t/x)$	$\forall$i, j

Dajemo primjer dokaza da je formula $(\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy) \vee Pc$ teorem. Dokaz je duži no što je potrebno, kako bismo demonstrirali primjenu svih pravila za kvantifikatore.

1	| $\exists x Rxx$	pretp.
2	| | Raa	pretp.
3	| | $\exists y Ray$	$\exists$u, 2
4	| | $\exists x \exists y Rxy$	$\exists$u, 3
5	| $\exists x \exists y Rxy$	$\exists$i, 1, 2–4
6	$\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy$	$\to$u, 1–5
7	$(\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy) \vee Pb$	$\vee$u, 6
8	$\forall z((\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy) \vee Pz)$	$\forall$u, 7
9	$(\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy) \vee Pc$	$\forall$i, 8

Dajemo primjer izvoda formule $\neg\neg Pc$ iz formula Pc i $\neg Pd$.

1	Pc	pretp.
2	$\neg Pd$	pretp.
3	| $\neg Pc$	pretp.
4	| $\bot$	$\bot$u, 1, 3
5	$\neg\neg Pc$	$\neg$u, 3–4