

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE

15. travnja 2021.

## BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA\*
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD\*
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA\*

\*Osim ako je u uputi u zadatku navedeno drugačije.

## A KATEGORIJA

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAX BODOVA (A)
1.		54
2.		50
3.		80
<b>UKUPNO</b>		<b>184</b>

Vrijeme rješavanja testa: 120 minuta

### Zadatak 1.

Promatramo dva poligona na slikama. Iscrtkane linije nisu dio zadatka, ali mogu vam pomoći pri rješavanju.

Kažemo da je neka točka  $u$  *poligonu* ako je vrh, na rubu, ili u unutrašnjosti tog poligona.

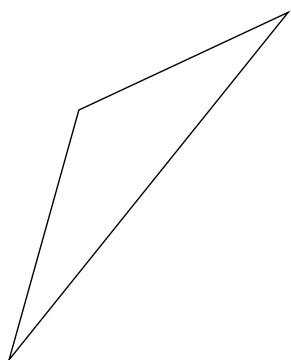
Poznato je da se u svakom poligonu negdje nalazi točno jedna posebna točka koju ćemo zvati *umjetnina*.

Predmetno područje situacije opisane pojedinom slikom čine *vrhovi* prikazanog poligona.<sup>1</sup>

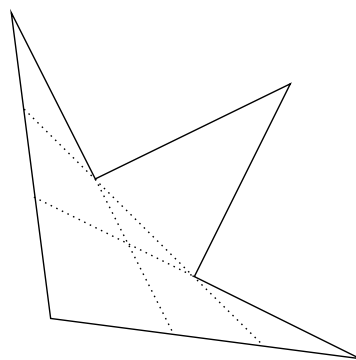
Za svaku sliku i danu formulu upišite **I**, **N** ili **?**, ovisno o tome je li na temelju danih informacija moguće utvrditi da je formula u danoj situaciji istinita, neistinita, ili nije moguće utvrditi istinitosnu vrijednost.

Koristite sljedeći prijevod:

- $a = b \dots$  Vrh  $a$  jest vrh  $b$ .
- $a \neq b \dots$  Vrh  $a$  nije vrh  $b$  (može se shvatiti i kao kraći zapis za  $\neg(a = b)$ ).
- $Xab \dots$  Vrh  $a$  je lijevo od vrha  $b$ .
- $Yab \dots$  Vrh  $a$  je ispod vrha  $b$ .
- $Pa \dots$  Svaka točka dužine koja povezuje vrh  $a$  i umjetninu nalazi se u poligonu (ta dužina nije nužno prikazana na slici).



Situacija (1)



Situacija (2)

Formula	Situacija (1)	Situacija (2)
$\forall a \forall b (Xab \rightarrow Yab)$		
$\forall a \forall b (Xab \vee Yba)$		
$\forall a \forall b \forall c ((Xab \wedge Xbc) \rightarrow \exists d Ydc)$		
$\forall a (Pa \vee \forall b (a = b \vee Yab))$		
$\exists a (Pa \rightarrow \forall b Pb)$		
$\forall a Pa \rightarrow \exists a \exists b \exists c (Xab \wedge Xbc \wedge \neg Xac)$		
$\forall a (\neg Pa \rightarrow \exists b (a \neq b \wedge \neg Pb))$		
$\exists e \exists f \forall a ((\neg Pa \wedge \forall b (a \neq b \rightarrow (Xba \vee Yba))) \rightarrow (a = e \vee a = f))$		
$\exists e \forall a (\neg Pe \wedge (Pa \rightarrow \exists b \exists c \exists d (Pb \wedge Pc \wedge Pd \wedge a \neq b \wedge a \neq c \wedge a \neq d \wedge b \neq c \wedge b \neq d \wedge c \neq d)))$		

**(18×3 boda = 54 boda)**

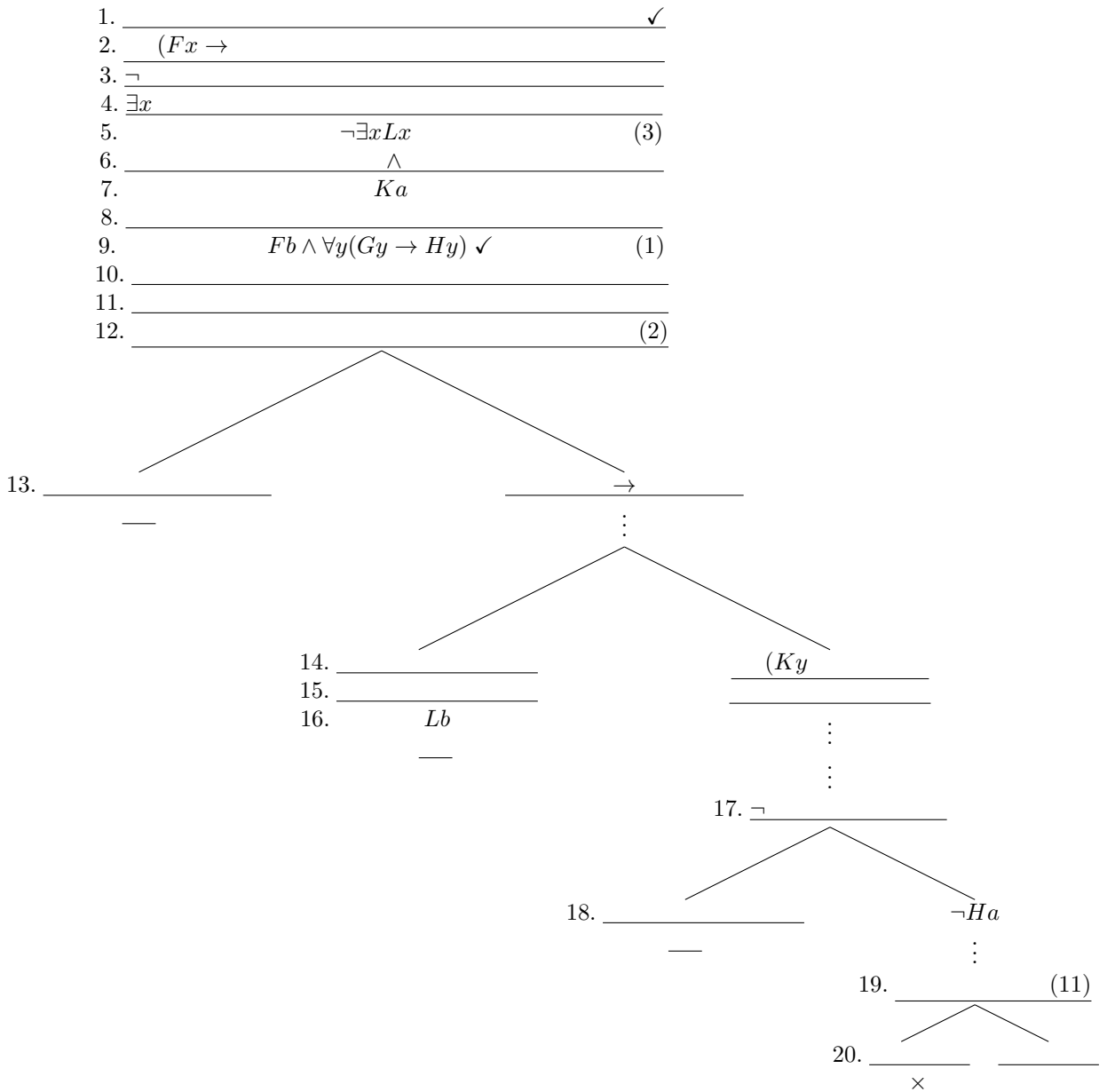
<sup>1</sup>Termin *predmetno područje* (domena, nosač, univerzalan skup) odnosi se, kao što je i uobičajeno, samo na skup nad kojim kvantificiraju kvantifikatori u logičkim formulama. Primjerice, to ne znači da se *umjetnina* mora nalaziti u nekom vrhu poligona samo zato što su samo vrhovi poligona u predmetnom području.

### Zadatak 2.

Semantičkim je stablom provjereno je li određeni zaključak valjan. Na temelju dobivenih podataka rekonstruirajte stablo i utvrdite je li zaključak u pitanju valjan.

Imajte pritom na umu sljedeće. Brojka u zagradi označava broj retka iz kojega su primjenom odgovarajućega pravila dobiveni iskazi u retku u kojem se ta brojka nalazi. Ako se dva iskaza nalaze u istom retku, ti su iskazi dobiveni iz istoga iskaza primjenom istoga pravila. Na iskaze oblika  $\neg\forall x\phi$  i  $\neg\exists x\phi$  izravno su primijenjena pravila, tj. takvi iskazi nisu prethodno prevedeni u iskaze oblika  $\exists x\neg\phi$  i  $\forall x\neg\phi$ . Nijedan iskaz u stablu ne uključuje prazno pokoličavanje, tj. ne sadržava količitelj (kvantifikator) kojemu varijabla nije vezana. Odnosno, stablo ne sadržava iskaze poput  $\forall x\exists yFy$ . U stablu nema preskakanja koraka i implicitnoga uklanjanja dvostrukoga nijeka. Primjerice, ako se u stablu nalazi iskaz  $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$ , on je raščlanjen na iskaze  $\neg\neg\phi$  i  $\neg\neg\psi$ . Put je zatvoren akko su u njem upisani neki atomaran iskaz i njegov nijek. Točkice u stablu povezuju uzastopne iskaze na istom putu i služe samo radi preglednosti.

Dopušteno je pisanje opravdanja, uključujući broj retka iz kojega ste dobili pojedini iskaz, ali ono se ne boduje niti utječe na dobiveni broj bodova.



Zaključak \_\_\_\_ valjan.

Bodovanje: potpuni izostanak rješenja nosi 10 bodova. Inače:

Neka je  $S$  skup svih ispravnih popunjenja zadanoga stabla. Definiramo  $T$  kao broj polja u stablu u kojima se sadržaj toga polja u vašem rješenju (uključujući kvačicu gdje je potrebna, no ignorirajući opravdanja) potpuno poklapa sa sadržajem istoga polja u rješenju  $R$  iz  $S$ , za ono rješenje  $R$  iz  $S$  za koje je taj broj najveći. Broj bodova za vaše rješenje stabla jednak je udvostručenomu broju  $T$ . Točan odgovor na pitanje o valjanosti iskaza nosi dodatna 2 boda ako i samo ako je cijelo stablo ispravno ispunjeno.

**(25×2 boda = 50 bodova)**

**Zadatak 3.** Riješite jedan od sljedećih zadataka.

**Boduje se samo jedno rješenje (jedna dedukcija). Kako postoje različite konvencije oko detalja u prirodnoj dedukciji, dobro proučite pravila u prilogu (na posljednjim stranicama testa).**

1. (80 bodova) Napišite izvod formule  $\exists z \exists w \forall x (Rxz \leftrightarrow \neg Sxw)$  iz premisa:

- $\exists z \forall x \forall y ((Rxz \wedge Ryz) \leftrightarrow \neg(Rxy \leftrightarrow Ryx))$ , te
- $\exists w \forall x \forall y ((Sxw \wedge Syw) \leftrightarrow (Sxy \leftrightarrow Syx))$ .

2. (35 bodova) Napišite izvod formule  $A \vee B$  iz premisa:

- $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ , te
- $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg C$ .

Uočite da dedukcije nose različit broj bodova. Ako napišete rješenja za obje ponuđene dedukcije, naznačite za koje rješenje (koju dedukciju) želite da se boduje.

Rješenja pišite na prazne papire **koji su zaklamani na kraju testa prije priloga**. Rješenja napisana na drugim mjestima ne prihvaćaju se.

(35 bodova ili 80 bodova)

*Bodovanje.* Ukratko, **boduju se samo točna rješenja i rješenja koja su vrlo bliska nekom točnom rješenju**, pri čemu ispravnost opravdanja ne ulazi u taj uvjet za bodovanje rješenja. Precizna pravila bodovanja:

- U slučaju izostanka rješenja, zadatak nosi 10 bodova.
- Inače, kako biste dobili bodove, ako dedukcija nije u potpunosti točna, mora se moći popraviti. Popravljanje se mora moći izvesti uz najviše tri (prva varijanta) odnosno najviše dvije (druga varijanta) promjene formula i neograničen broj promjena opravdanja.
- *Promjena formule* je umetanje retka s novom formulom ili izmjena formule u postojećem retku u dedukciji. Nazovimo sve takve retke modificiranima. Popravljanje dedukcije, uz već navedeno, ne smije rezultirati s tri uzastopna modificirana retka. Postojanje i ispravnost opravdanja ne utječu na ovaj uvjet.
- *Promjena opravdanja* je dodavanje ili ispravljanje opravdanja u nekom retku, u odnosu na početnu dedukciju. Smatra se da je opravdanje u modificiranom retku uvijek pogrešno (traži promjenu).
- Smatra se da brojevi u opravdanjima referiraju na stanje prije popravljanja (nemojte pokušavati pogoditi ispravne brojeve redaka nakon ispravljanja). Ako je maksimalan predviđen broj bodova  $M$ , minimalan broj potrebnih promjena formule  $f$ , a opravdanja  $o$ , takvo rješenje zadatka nosi  $M - 3f^2 - o$  bodova.
- Veličina dedukcije i (ne)postojanje redaka koji se ne koriste kasnije u dedukciji ne utječu (izravno) na broj bodova.

### Rješenje Zadatka 3.

### Rješenje Zadatka 3.

## PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (1/2)

- Dedukcija može biti izvod ili dokaz. Izvod počinje jednom ili više (glavnih) premisa odvojenih od ostatka izvoda vodoravnom crtom. Dokaz nema (glavnih) premisa, što povlači da dokaz mora započeti podizvodom. Primjere možete vidjeti na dnu sljedeće stranice.
- Opravdanja se sastoje od tri podatka: simbol veznika, slovo u ili i (za uvođenje/isključenje), te jedan ili više brojeva ili brojevnih raspona. Ta tri podatka mogu biti odijeljena razmakom, zarezom, kosom crtom ili nekako drugačije. Poredak ta tri podatka proizvoljan je (to ne znači da je poredak brojeva proizvoljan). Iznimno, reiteracija (opetovanje) ne sadrži slovo u ili i.
- Kod nekih je pravila poredak premisa iz kojih slijede proizvoljan, što je signalizirano **zvjezdicom**. Kod takvih se pravila iznimno dopušta i proizvoljan poredak u zapisu brojeva u opravdanju. Primjerice, kod uvođenja konjunkcije, redak rednog broja  $k$  mogao se pojaviti prije retka rednog broja  $j$ , a u opravdanju je u oba slučaja moglo pisati  $\wedge u, j, k$  ili  $\wedge u, k, j$ . U sva četiri slučaja, pravilo zovemo  $\wedge u$ .
- Tri točkice signaliziraju da su na njihovu mjestu možda još neki redci osim upisanih.

Uvođenje konjunkcije. \*

j	A	
	⋮	
k	B	
	⋮	
	A ∧ B	∧u, j, k

Uvođenje disjunkcije.

j	A		j	B	
	⋮			⋮	
	A ∨ B	∨u, j		A ∨ B	∨u, j

Uvođenje kondicionala.

j	A	pretp.	
	⋮		
k	B		
	A → B	→u, j-k	

Uvođenje bikondicionala.

j	A	pretp.	
	⋮		
k	B		
m	B	pretp.	
	⋮		
n	A		
	A ↔ B	↔u, j-k, m-n	

Uvođenje kontradikcije. \*

j	A	
	⋮	
k	¬A	
	⋮	
	⊥	⊥u, j, k

Uvođenje negacije.

j	A	pretp.	
	⋮		
k	⊥		
	¬A	¬u, j-k	

Isključenje konjunkcije.

j	A ∧ B		j	A ∧ B	
	⋮			⋮	
	A	∧i, j		B	∧i, j

Isključenje disjunkcije.

e	A ∨ B	
	⋮	
j	A	pretp.
	⋮	
k	C	
m	B	pretp.
	⋮	
n	C	
	C	∨i, e, j-k, m-n

Isključenje kondicionala. \*

j	A → B	
	⋮	
k	A	
	⋮	
	B	→i, j, k

Isključenje bikondicionala. \*

j	A ↔ B		j	A ↔ B	
	⋮			⋮	
k	A		k	B	
	⋮			⋮	
	B	↔i, j, k		A	↔i, j, k

Isključenje kontradikcije.

j	⊥	
	⋮	
	A	⊥i, j

Isključenje negacije.

j	¬¬A	
	⋮	
	A	¬i, j

Reiteracija (opetovanje).

j	A	
	⋮	
	A	re., j (ili op., j)



**PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (2/2)**

- U nastavku navodimo pravila za kvantifikatore (količitelje). Koristimo logiku prvog reda bez funkcijskih simbola. Pravila su (zbog preciznosti) opisana apstraktnije nego što ste možda učili u školi, no suštinski su to ista pravila. **Na dnu je primjer dokaza.**
- Neka je  $A$  formula koja možda sadrži pojave (javljanja, nastupe) neke varijable  $x$ .
  - Označimo s  $A(t/x)$  formulu jednaku formuli  $A$ , osim što je **svaka** slobodna pojava varijable  $x$  u  $A$  zamijenjena pojavom (pseudo)konstante  $t$ .
- Neka je  $A$  formula koja možda sadrži pojave neke (pseudo)konstante  $t$ .
  - Označimo s  $A(x/t)$  formulu jednaku formuli  $A$ , osim što je **svaka** pojava (pseudo)konstante  $t$  u  $A$  zamijenjena pojavom varijable  $x$ .
  - Označimo s  $A(x//t)$  formulu jednaku formuli  $A$ , osim što je **nula ili više** pojava (pseudo)konstante  $t$  u  $A$  zamijenjeno pojavom varijable  $x$ .

Uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora.

j	A	
	⋮	
	∃xA(x//t)	∃u, j

Ako formula  $A$  već sadrži kvantifikatore nad varijablom  $x$ , pojave  $t$  u  $A$  ne smiju biti u dosegu tih kvantifikatora.

Uvođenje univerzalnog kvantifikatora.

j	A	
	⋮	
	∀xA(x/t)	∀u, j

Pseudokonstanta  $t$  se pritom ne smije javljati u (u retku  $j$ ) vriedećim pretpostavkama. Ako formula  $A$  već sadrži kvantifikatore nad varijablom  $x$ , pojave pseudokonstante  $t$  u  $A$  ne smiju biti u dosegu tih kvantifikatora.

Isključenje egzistencijalnog kvantifikatora.

j	∃xA	
	⋮	
k	A(t/x)	pretp.
	⋮	
m	B	
	B	∃i, j, k–m

Pseudokonstanta  $t$  se ne smije javljati u formuli koju isključujemo, u (u retku  $k$ ) vriedećim pretpostavkama (osim, naravno, pretpostavke  $A(t/x)$ ), niti u formuli  $B$ .

Isključenje univerzalnog kvantifikatora.

j	∀xA	
	⋮	
	A(t/x)	∀i, j

Dajemo primjer dokaza da je formula  $(\exists xRxx \rightarrow \exists x\exists yRxy) \vee Pc$  teorem. Dokaz je duži no što je potrebno, kako bismo demonstrirali primjenu svih pravila za kvantifikatore.

1	∃xRxx	pretp.
2	Raa	pretp.
3	∃yRay	∃u, 2
4	∃x∃yRxy	∃u, 3
5	∃x∃yRxy	∃i, 1, 2–4
6	∃xRxx → ∃x∃yRxy	→u, 1–5
7	$(\exists xRxx \rightarrow \exists x\exists yRxy) \vee Pb$	∨u, 6
8	$\forall z((\exists xRxx \rightarrow \exists x\exists yRxy) \vee Pz)$	∀u, 7
9	$(\exists xRxx \rightarrow \exists x\exists yRxy) \vee Pc$	∀i, 8

Dajemo primjer izvoda formule  $\neg\neg Pc$  iz formula  $Pc$  i  $\neg Pd$ .

1	Pc	pretp.
2	¬Pd	pretp.
3	¬Pc	pretp.
4	⊥	⊥u, 1, 3
5	¬¬Pc	¬u, 3–4