DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE

5. travnja 2022.

BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA*
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD*
- POGREŠNO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA*

*Osim ako je u uputi u zadatku navedeno drugačije.

A KATEGORIJA

ZADATAK	**BROJ BODOVA**	**MAX BODOVA**
1.		21
2.		48
3.		15
4.		65
UKUPNO		**149**

Vrijeme rješavanja testa: 150 minuta

Zadatak 1.

Troje sugovornika, Ananas, Banana i Citrus, raspravljaju o međusobnoj *sočnosti*. Dane su sljedeće izjave. Pritom je svaka navedena izjava dana točno jednom (nije bilo ponavljanja izjava).

1. Banana je sočna osim ako je Ananas sočan.
2. Banana je fina.
3. Banana je sočna i stoga nije sočna.
4. Ananas je sočan samo ako je Banana sočna.

Znamo sljedeće činjenice:

i. svaki je sugovornik (Ananas, Banana i Citrus) dao barem jednu izjavu;

ii. iz Citrusovih izjava slijedi da je Banana sočna;

iii. Ananasova izjava (ako je jedna) nije konzistentna, odnosno konjunkcija Ananasovih izjava (ako ih je više) nije konzistentna.

Odredite tko je dao koju izjavu na način da pokraj imena upišete redne brojeve (1., 2., 3. i 4.) ispred izjava sugovornika. Priznaje se samo potpuno točno rješenje (12 bodova). Potpuni izostanak rješenja nosi 4 boda.

Ananas: ________ . Banana: ________ . Citrus: ________ .

Pretpostavimo da znamo još i da je *najviše dvoje sugovornika izjavilo svatko po barem jednu neistinu.* Za svaku donju tvrdnju, zaokružite DA ako iz ranije navedenih činjenica (i)–(iii), informacija o tome koji je sugovornik izgovorio koju izjavu, i nove informacije slijedi ta tvrdnja, a ako ne slijedi, zaokružite NE.

Ananas je sočan.	DA NE
Banana je sočna.	DA NE
Citrus je sočan.	DA NE

(12 + 9 = 21 bod)

Zadatak 2.

U ovom zadatku potrebno je odrediti istinitost ponuđenih rečenica u tri prikazane situacije. Prvo ćemo definirati neke termine.

Polje je bilo koja bijela ćelija tablice. Npr. u situaciji (a) imamo četiri polja. Dva polja smatramo susjednima ako se nalaze u susjednim stupcima istog retka, ili susjednim recima istog stupca.

Put je bilo koji konačan niz sastavljen od susjednih polja, tj. svako polje u nizu susjedno je polju koje mu neposredno prethodi u nizu (osim prvog polja, koje nema prethodnika). Put x i y su jedan te isti put ako i samo ako su jednake duljine i u svakom koraku prolaze istim poljima.

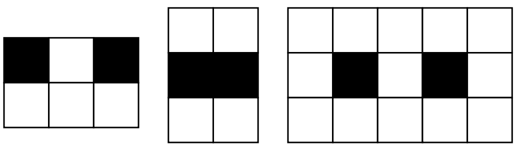
Kratko ćemo pisati $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ neka polja te se tim redom javljaju na putu x, i put x ne prolazi drugim poljima. Moguće je da se unutar puta polja ponavljaju, npr. ako su x i y bilo koja dva susjedna polja, onda je (x, y, x) jedan put. Put ne može biti prazan (bez polja), ali može biti duljine jedan, npr. (x) je put duljine jedan ako je x neko polje. Jednočlan put nije isti predmet kao (jedino) polje koje taj put sadrži, tj. ne vrijedi $x = (x)$.

Predmetno područje pojedine situacije čine sva polja, te svi putovi koji se mogu formirati pomoću tih polja (npr. u situaciji (a) postoje četiri polja, četiri putova duljine jedan, šest putova duljine dva, itd.).

Za svaku situaciju i danu formulu upišite **I**, **N** ili **?**, ovisno o tome je li na temelju danih informacija moguće utvrditi da je formula u danoj situaciji istinita, neistinita, ili nije moguće utvrditi istinitosnu vrijednost.

Koristite sljedeći prijevod:

- $Cx \ldots$ x je polje.
- $Exy \ldots$ Barem jedna pojava polja x nalazi se u putu y.
- $Sxy \ldots$ Put x je sadržan u putu y. Dakle, ako vrijedi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, onda za neki i takav da vrijedi $1 \leq i$ te $i + n - 1 \leq m$, vrijedi $y_k = x_{k+1-i}$ za sve k takve da vrijedi $i \leq k \leq i + n - 1$.
- $Ax \ldots$ U putu x svako je polje sadržano najviše jednom.
- $Kxyz \ldots$ Put z sastoji se od puta x na kojeg je nadovezan put y. Dakle, ako vrijedi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, tada su x_n i y_1 susjedna polja te vrijedi $z = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$.



(a) (b) (c)

	Formula	(a)	(b)	(c)
i.	$\exists x(Ax \land \forall y(Cy \to Eyx))$			
ii.	$\exists x \exists y(Kxxy \land \forall z(Cz \to Ezy))$			
iii.	$\exists x \forall y(Kxxy \to \forall z(Cz \to Ezy))$			
iv.	$\forall x \forall y((Ax \land Ay) \to \exists z(Cz \land (Ezx \leftrightarrow Ezy)))$			
v.	$\exists x \forall y(Ay \to Syx)$			
vi.	$\forall x \forall y \forall z((Ax \land Ay \land Kxyz) \to (Az \lor Sxy \lor Syx))$			
vii.	$\forall x \forall y(\exists z(Exz \land Eyz) \to \exists z(Az \land Exz \land Eyz))$			
viii.	$\forall x \forall y(\exists z(Kxyz \land Kyxz) \to (Sxy \lor Syx))$			

Bodovanje: točan odgovor nosi 2 boda, izostanak rješenja 1 bod, a pogrešno rješenje 0 bodova.

(24×2 boda $= 48$ bodova)

Zadatak 3.

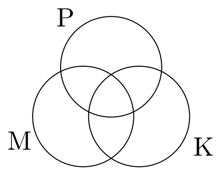
Odredite jesu li zaključci (argumenti) valjani, uz uobičajeno suvremeno shvaćanje valjanosti (npr. za propoziciju oblika “Svi A su B” ne pretpostavljamo da postoji nešto što je A).

- Ako zaključak jest valjan, zaokružite DA.
- Ako zaključak nije valjan, zaokružite NE i u pripadni Vennov dijagram pojmova **P**riča, **M**aštovito i **K**reativno ucrtajte bilo koji protuprimjer. Pritom možete koristiti simbol $\times$ i sjenčanje (križanje) područja. Popunjenje dijagrama ne mora biti minimalno. Dovoljno je da su uz prikazanu situaciju premise istinite, a konkluzija neistinita.

a)

Sve su priče kreativne.
Sve što je kreativno, maštovito je.
Sve što je maštovito, maštovito je ako je uz to i kreativno.

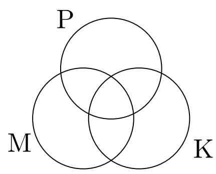
Valjan: DA / NE



b)

Sve zabavno je zabavno.
Za svaku priču vrijedi: kreativna je, osim ako je, i samo ako je, maštovita.

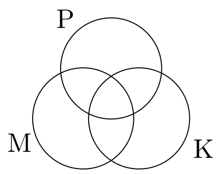
Valjan: DA / NE



c)

Ništa što je ujedno i kreativno i maštovito nije priča.
Nijedna maštovita kreativna priča nije maštovita.

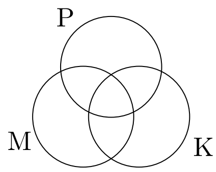
Valjan: DA / NE



d)

Svaka je priča ili kreativna, ili maštovita.
Nijedna priča nije kreativna.
Sve su priče maštovite.

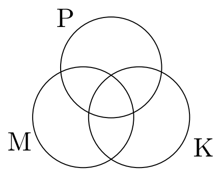
Valjan: DA / NE



e)

Za svaku priču vrijedi: nije maštovita ako i samo ako nije kreativna.
Za sve maštovito vrijedi: to nešto je priča ako i samo je kreativno.
Za sve kreativno vrijedi: to nešto je priča ako i samo je maštovito.

Valjan: DA / NE



(5 $\times$ 3 boda = 15 bodova)

Zadatak 4. Riješite jedan od sljedećih zadataka.

Boduje se samo jedno rješenje (jedna dedukcija). Kako postoje različite konvencije oko detalja u prirodnoj dedukciji, dobro proučite pravila u prilogu (na posljednjim stranicama testa).

1. (65 bodova) Napišite izvod formule $\exists y(\exists x Ryx \to \forall x Rxy)$ iz premise $\neg\forall x\exists y Rxy$.
2. (40 bodova) Napišite izvod formule B iz premise $\big((A \lor (B \land \neg A)) \to (\neg B \to A)\big) \to (A \land \neg A)$.

Uočite da dedukcije nose različit broj bodova. Ako napišete rješenja za obje ponuđene dedukcije, naznačite za koje rješenje (koju dedukciju) želite da se boduje.

Rješenje pišite na prazne papire **koji su zaklamani na kraju testa prije priloga**. Rješenja napisana na drugim mjestima ne prihvaćaju se.

(40 bodova ili 65 bodova)

Bodovanje. Ukratko, **boduju se samo točna rješenja i rješenja koja su vrlo bliska nekom točnom rješenju**, pri čemu ispravnost opravdanja ne ulazi u taj uvjet za bodovanje rješenja. Precizna pravila bodovanja:

- U slučaju izostanka rješenja, zadatak nosi 10 bodova.
- Inače, kako biste dobili bodove, ako dedukcija nije u potpunosti točna, mora se moći popraviti. Popravljanje se mora moći izvesti uz najviše tri *promjene formula* i neograničen broj *promjena opravdanja*.
- *Promjena formule* je umetanje retka s novom formulom ili izmjena formule u postojećem retku u dedukciji. Nazovimo sve takve retke modificiranima. Popravljanje dedukcije, uz već navedeno, ne smije rezultirati s tri uzastopna modificirana retka. Postojanje i ispravnost opravdanja ne utječu na ovaj uvjet.
- *Promjena opravdanja* je dodavanje ili ispravljanje opravdanja u nekom retku, u odnosu na početnu dedukciju. Smatra se da je opravdanje u modificiranom retku uvijek pogrešno (traži promjenu).
- Smatra se da opravdanja referiraju na stanje prije popravljanja (npr. nemojte pokušavati pogoditi ispravne brojeve redaka nakon ispravljanja). Ako je maksimalan predviđen broj bodova M, minimalan broj potrebnih promjena formule f, a opravdanja o, takvo rješenje zadatka nosi $M - 3f^2 - o$ bodova.
- Veličina dedukcije i (ne)postojanje redaka koji se ne koriste kasnije u dedukciji ne utječu (izravno) na broj bodova.

Rješenje Zadatka 4.

Rješenje Zadatka 4.

PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (1/2)

- Dedukcija može biti izvod ili dokaz. Izvod počinje jednom ili više (glavnih) premisa odvojenih od ostatka izvoda vodoravnom crtom. Dokaz nema (glavnih) premisa, što povlači da dokaz mora započeti podizvodom. Primjere možete vidjeti na dnu sljedeće stranice.
- Opravdanja se sastoje od tri podatka: simbol veznika, slovo `u` ili `i` (za uvođenje/isključenje), te jedan ili više brojeva ili brojevnih raspona. Ta tri podatka mogu biti odijeljena razmakom, zarezom, kosom crtom ili nekako drugačije. Poredak ta tri podatka proizvoljan je (to ne znači da je poredak brojeva proizvoljan). Iznimno, reiteraicija (opetovanje) ne sadrži slovo `u` ili `i`.
- Kod nekih je pravila poredak premisa iz kojih slijede proizvoljan, što je signalizirano **zvjezdicom**. Kod takvih se pravila iznimno dopušta i proizvoljan poredak u zapisu brojeva u opravdanju. Primjerice, kod uvođenja konjunkcije, redak rednog broja k mogao se pojaviti prije retka rednog broja j, a u opravdanju je u oba slučaja moglo pisati $\wedge u, j, k$ ili $\wedge u, k, j$. U sva četiri slučaja, pravilo zovemo ∧u.
- Tri točkice signaliziraju da su na njihovu mjestu možda još neki redci osim upisanih.

Uvođenje konjunkcije. *

j	A	
	$\vdots$	
k	B	
	$\vdots$	
	$A \wedge B$	∧u, j, k

Uvođenje disjunkcije.

j	A	
	$\vdots$	
	$A \vee B$	∨u, j

j	B	
	$\vdots$	
	$A \vee B$	∨u, j

Uvođenje kondicionala.

j	│ A	pretp.
	│ $\vdots$	
k	│ B	
	$A \to B$	→u, j–k

Uvođenje bikondicionala.

j	│ A	pretp.
	│ $\vdots$	
k	│ B	
m	│ B	pretp.
	│ $\vdots$	
n	│ A	
	$A \leftrightarrow B$	↔u, j–k, m–n

Uvođenje kontradikcije. *

j	A	
	$\vdots$	
k	$\neg A$	
	$\vdots$	
	$\bot$	⊥u, j, k

Uvođenje negacije.

j	│ A	pretp.
	│ $\vdots$	
k	│ $\bot$	
	$\neg A$	¬u, j–k

Isključenje konjunkcije.

j	$A \wedge B$	
	$\vdots$	
	A	∧i, j

j	$A \wedge B$	
	$\vdots$	
	B	∧i, j

Isključenje disjunkcije.

e	$A \vee B$	
	$\vdots$	
j	│ A	pretp.
	│ $\vdots$	
k	│ C	
m	│ B	pretp.
	│ $\vdots$	
n	│ C	
	C	∨i, e, j–k, m–n

Isključenje kondicionala. *

j	$A \to B$	
	$\vdots$	
k	A	
	$\vdots$	
	B	→i, j, k

Isključenje bikondicionala. *

j	$A \leftrightarrow B$	
	$\vdots$	
k	A	
	$\vdots$	
	B	↔i, j, k

j	$A \leftrightarrow B$	
	$\vdots$	
k	B	
	$\vdots$	
	A	↔i, j, k

Isključenje kontradikcije.

j	$\bot$	
	$\vdots$	
	A	⊥i, j

Isključenje negacije.

j	$\neg\neg A$	
	$\vdots$	
	A	¬i, j

Reiteracija (opetovanje).

j	A	
	$\vdots$	
	A	re., j (ili op., j)

PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (2/2)

- U nastavku navodimo pravila za kvantifikatore (količitelje). Koristimo logiku prvog reda bez funkcijskih simbola. Pravila su (zbog preciznosti) opisana apstraktnije nego što ste možda učili u školi, no suštinski su to ista pravila. **Na dnu je primjer dokaza.**
- Neka je A formula koja možda sadrži pojave (javljanja, nastupe) neke varijable x.
  - Označimo s $A(t/x)$ formulu jednaku formuli A, osim što je **svaka** slobodna pojava varijable x u A zamijenjena pojavom (pseudo)konstante t.
- Neka je A formula koja možda sadrži pojave neke (pseudo)konstante t.
  - Označimo s $A(x/t)$ formulu jednaku formuli A, osim što je **svaka** pojava (pseudo)konstante t u A zamijenjena pojavom varijable x.
  - Označimo s $A(x//t)$ formulu jednaku formuli A, osim što je **nula ili više** pojava (pseudo)konstante t u A zamijenjeno pojavom varijable x.

Uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora.

j	A	
	$\vdots$	
	$\exists x A(x//t)$	$\exists$u, j

Ako formula A već sadrži kvantifikatore nad varijablom x, pojave od t u A ne smiju biti u dosegu tih kvantifikatora.

Uvođenje univerzalnog kvantifikatora.

j	A	
	$\vdots$	
	$\forall x A(x/t)$	$\forall$u, j

Pseudokonstanta t se pritom ne smije javljati u (u retku j) vrijedećim pretpostavkama. Ako formula A već sadrži kvantifikatore nad varijablom x, pojave pseudokonstante t u formuli A ne smiju biti u dosegu tih kvantifikatora.

Isključenje egzistencijalnog kvantifikatora.

j	$\exists x A$	
	$\vdots$	
k	$\quad A(t/x)$	pretp.
	$\quad \vdots$	
m	$\quad B$	
	B	$\exists$i, j, k–m

Pseudokonstanta t se ne smije javljati u formuli koju isključujemo, u (u retku k) vrijedećim pretpostavkama (osim, naravno, pretpostavke $A(t/x)$), niti u formuli B.

Isključenje univerzalnog kvantifikatora.

j	$\forall x A$	
	$\vdots$	
	$A(t/x)$	$\forall$i, j

Dajemo primjer dokaza da je formula $(\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy) \lor Pc$ teorem. Dokaz je duži no što je potrebno kako bismo demonstrirali primjenu svih pravila za kvantifikatore.

1	$\quad \exists x Rxx$	pretp.
2	$\quad\quad Raa$	pretp.
3	$\quad\quad \exists y Ray$	$\exists$u, 2
4	$\quad\quad \exists x \exists y Rxy$	$\exists$u, 3
5	$\quad \exists x \exists y Rxy$	$\exists$i, 1, 2–4
6	$\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy$	$\to$u, 1–5
7	$(\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy) \lor Pb$	$\lor$u, 6
8	$\forall z((\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy) \lor Pz)$	$\forall$u, 7
9	$(\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy) \lor Pc$	$\forall$i, 8

Dajemo primjer izvoda formule $\neg\neg Pc$ iz formula Pc i $\neg Pd$.

1	Pc	pretp.
2	$\neg Pd$	pretp.
3	$\quad \neg Pc$	pretp.
4	$\quad \bot$	$\bot$u, 1, 3
5	$\neg\neg Pc$	$\neg$u, 3–4