DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE

16.-18. travnja 2018.

BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA*
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD*
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

*Osim ako je u uputi u zadatku navedeno drugačije.

A KATEGORIJA

ZADATAK	**BROJ BODOVA**	**MAX BODOVA**
1.		30
2.		33
3.		42
4.		103
5.		60
6.		100
UKUPNO		**368**

Vrijeme rješavanja testa: 150 minuta

Zadatak 1.

a. U kojoj od sljedećih rečenica značenje veznika ne odgovara značenju veznika konjunkcije u logici s obzirom na njegove istinitosne vrijednosti? Zaokružite broj ispred te rečenice.

1. Pogledaj u nebo i vidjet ćeš pomrčinu mjeseca.
2. Ivan je bio u trgovini, ali nije kupio sve potrebne namirnice.
3. Lana živi u Zagrebu i ide u treći razred.
4. Marko trenira košarku i vrlo je uspješan košarkaš.
5. Iako Leon često kasni, danas je došao na vrijeme.

b. U kojoj bi od prethodno navedenih rečenica zamjena poretka surečenica uzrokovala kršenje neke od Griceovih maksima? (u odgovoru na ovo pitanje zanemarite rečenicu u kojoj se ne radi o konjunkciji prema značenju veznika)
Odgovor: ________________

c. Pod pretpostavkom da je premisa istinita, koja je Griceova maksima prekršena u izvedenoj konkluziji? Navedite maksimu koja najviše odgovara.
P: Ivan živi u Trogiru.
K: Dakle, Ivan živi u Trogiru ili je danas petak.
Odgovor: __________________________________

d. Koje je Griceove maksime prekršio B u sljedećim razgovorima? Za svaki razgovor navedite maksimu koja najviše odgovara.

i. A: Možete li mi reći koliko je sati?
B: Mogu.
Odgovor: ________________

ii. A: Koliko još imamo vremena za pisanje testa?
B: Dvanaest minuta, deset sekundi i 25 stotinki.
Odgovor: ________________

iii. A: Je li Vaše dijete dječak ili djevojčica?
B: Da.
Odgovor: ________________

e. Razvrstajte sljedeće rečenice na konverzacijske i konvencionalne implikature:
1) Trebala sam doći večeras, ali auto mi se pokvario.
2) – Je li Marko dobar logičar? – Marko je vrlo pristojan prema starijima.
3) – Gdje mogu kupiti cigarete? – Kafić je preko puta.
4) Londonski neboder "Shard" više nije najviša zgrada u Europi.
Konvencionalne: ________________
Konverzacijske: ________________

(10×3 boda = 30 bodova)

Zadatak 2.

Neka su s F, G i H označene neke formule logike sudova. Pritom vrijedi sljedeće:

- G je dobivena iz F tako da je svaka pojava (nastup) jednostavnog iskaza A zamijenjena pojavom jednostavnog iskaza B.
- H je jednaka F, ili je dobivena iz F tako da su neke pojave (nastupi) jednostavnog iskaza A zamijenjene pojavom jednostavnog iskaza B.

Primjerice, ako je s F označena formula $A \wedge A$, s G mora biti označena formula $B \wedge B$, a s H može biti označena formula $B \wedge A$. Ako je s F označena formula $B \rightarrow C$, onda G i H također označavaju $B \rightarrow C$.

Ako je tvrdnja istinita za sve (dopuštene) odabire formula označenih s F, G i H, zaokružite I; inače N.

Zadane su sljedeće tvrdnje:

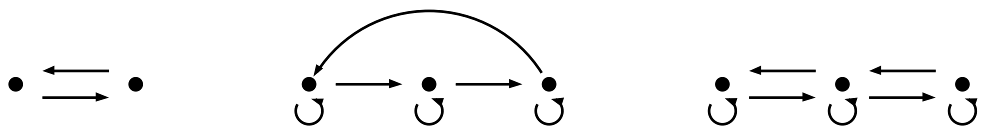
1. (a) Skup formula F, G i H je zadovoljiv samo ako sadrži barem jednu tautologiju. I / N
   (b) Ako je G tautologija, onda je i F tautologija. I / N
   (c) Ako je H tautologija, onda je i G tautologija. I / N
2. Pri određenju odgovora za sljedeće tvrdnje pretpostavite da je F još i **tautologija.**
   (a) G je tautologija. I / N
   (b) H je tautologija. I / N
   (c) Iz F slijedi G. I / N
   (d) Iz F slijedi H. I / N
   (e) Iz G slijedi F. I / N
   (f) Iz G slijedi H. I / N
   (g) Iz H slijedi F. I / N
   (h) Iz H slijedi G. I / N

(11×3 boda = 33 boda)

Zadatak 3.

Zadana su sljedeća tri modela (situacije). U prvom modelu domenu čine dvije istaknute točke. U preostalim modelima domenu čine tri istaknute točke. Relacijski simbol R interpretiramo na sljedeći način: Rxy ako i samo ako postoji strelica iz x u y.

Odredite istinitost formula u modelima (a), (b) i (c):



(a) (b) (c)

Formula	Istinitost u (a)	Istinitost u (b)	Istinitost u (c)
$\forall x Rxx$	N		
$\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$			
$\forall x \forall y \forall z (Rxy \rightarrow (Ryz \rightarrow Rxz))$			
$\forall x \forall y \forall z (Rxy \rightarrow (Rxz \rightarrow Ryz))$			
$\forall x \exists y Rxy$			

(14×3 boda = 42 boda)

Zadatak 4.

i. Provjerite istinitost sljedećih tvrdnji. Pored istinitih tvrdnji upišite kvačicu (✓), a pored neistinitih križić ($\times$). U svakom od zadataka izrazi "ako ... onda" i "i" označavaju redom materijalnu implikaciju i konjunkciju, 'P', 'Q' i 'R' označavaju *bilo koje* formule iskazne logike, a 'Γ' označava *bilo koji* skup formula iskazne logike (izraz $\Gamma, P \vDash Q$ znači „iz skupa formula $\Gamma \cup \{P\}$ slijedi formula Q"). Simboli '$\wedge$', '$\vee$', '$\rightarrow$' i '$\vDash$' imaju standardno značenje.

a. $P \vDash P$.

b. Ako $\Gamma \vDash P$ onda $\Gamma, Q \vDash P$.

c. Ako $\Gamma, P \vDash Q$ onda $\Gamma \vDash P \wedge Q$.

d. Ako $\Gamma, P \vDash Q$ i $\Gamma, Q \vDash P$ onda $\Gamma \vDash P \wedge Q$.

e. Ako $Q, \Gamma \vDash R$ i $\Gamma \vDash P$ onda $P \rightarrow Q, \Gamma \vDash R$.

f. Ako $\Gamma \vDash P \rightarrow Q$ onda $\Gamma \vDash Q \vee P$.

g. Ako $P, \Gamma \vDash Q$ onda $\Gamma \vDash P \rightarrow Q$.

h. Ako $\Gamma, P \vDash Q$ i $\Gamma, Q \vDash P$ onda $\Gamma \vDash P \vee Q$.

i. Ako $P, \Gamma \vDash R$ onda $P \wedge Q, \Gamma \vDash R$.

j. Ako $\Gamma \vDash P$ i $\Gamma \vDash Q$ onda $\Gamma \vDash P \wedge Q$.

k. Ako $\Gamma \vDash P \vee Q$ i $P \vDash R$ onda $\Gamma \vDash P \vee R$.

l. Ako $\Gamma \vDash P$ onda $\Gamma \vDash P \vee Q$.

m. Ako $P, \Gamma \vDash R$ i $Q, \Gamma \vDash R$ onda $P \vee Q, \Gamma \vDash R$.

n. Ako $\Gamma \vDash P \vee Q$ onda $\Gamma \vDash P$.

o. Ako $\Gamma \vDash P$ onda $\Gamma \vDash P \wedge Q$.

ii. Koristeći samo istinite tvrdnje iz prethodnog zadatka kao pravila, dokažite sljedeće tvrdnje. Nije dopušteno koristiti pravila iz priloga, kao ni bilo koja druga pravila, te čak ni pravilo pretpostavke/premise. Slova pravila preuzeta su iz prethodnog podzadatka i na taj ih je način potrebno navoditi u dokazima. Svaku novu tvrdnju napišite u novi redak, označite brojem retka, te navedite pomoću kojeg pravila ste ju dokazali i iz kojih redaka, tako da navedete brojeve tih redaka i slovo tog pravila. Pritom se slobodno služite činjenicom da poredak premisa nije bitan te da su konjunkcija i disjunkcija komutativne – npr. $A, \Gamma \vDash B \vee C$ je u ovom zadatku ista tvrdnja kao i $\Gamma, A \vDash C \vee B$. Radi ilustracije, jedan bi dokaz mogao biti:

Primjer:

(1)	$A \vDash A$	a.
(2)	$A \wedge B \vDash A$	1, i.

1. $A \wedge B \vDash A \vee B$

(1)
(2)
(3)

2. $A, A \rightarrow B \vDash B$

(1)
(2)
(3)
(4)

3. $\models A \to A$

   (1)
   (2)

iii. Dokažite sljedeće tvrdnje na isti način kao i u prethodnom podzadatku.

1. $A, B \vee C \models (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

   (1)
   (2)
   (3)
   (4)
   (5)
   (6)
   (7)
   (8)
   (9)
   (10)
   (11)
   (12)

2. $(A \wedge B) \to C \models A \to (B \to C)$

   (1)
   (2)
   (3)
   (4)
   (5)
   (6)
   (7)
   (8)
   (9)
   (10)
   (11)

iv. Provjerite istinitost sljedećih tvrdnji.Pored istinitih tvrdnji upišite kvačicu (✓), a pored neistinitih križić ($\times$). Svi izrazi imaju isto značenje kao u podzadatku **i.**, '$\neg$' također ima standardno značenje, a $\perp$ označava formulu čija je istinitostna vrijednost uvijek 'neistina'.

p. $\Gamma \models \perp$.

r. Ako $\Gamma \models P$ onda $\neg P, \Gamma \models \perp$.

s. Ako $P, \Gamma \models \perp$ onda $\Gamma \models \neg P$.

v. Na isti način kao u podzadatku **ii.**, koristeći samo istinite tvrdnje iz podzadataka **i.** i **iv.**, dokažite sljedeće tvrdnje.

1. $A \models \neg\neg A$

   (1)
   (2)
   (3)

2. $\neg A \lor \neg B \models \neg(A \land B)$

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
(8)

3. $\neg B, A \rightarrow B \models \neg A$

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)

Napomena: U podzadatcima **ii.**, **iii.** i **v.** svaki točno ispunjen redak u dokazu donosi 1 bod. Ako u dokazu postoji najmanje jedan prazan redak i jedan ispunjeni redak, dokaz donosi 0 bodova, osim u slučaju da je pronađeno rješenje koje je kraće od predviđenog. Potpuno prazan dokaz donosi 1 bod.

(18×3 boda + 49 ×1 bod = 103 boda)

Zadatak 5.

Promatrajmo samo iskaze (iskazne logike) koji sadrže **samo** jednostavne iskaze među sljedećima: A, B i C. Nazovimo jedan (takav) iskaz informativnijim od drugog (takvog) iskaza ako je u njegovoj istinitosnoj tablici **veći ili jednak** omjer broja redaka s vrijednošću N naspram ukupnog broja redaka. Iskazi su jednako informativni ako je jedan informativniji od drugog i obrnuto. Iskaz je strogo informativniji od drugog ako je informativniji od njega, ali ta dva iskaza nisu jednako informativna.

Odredite vrijede li uvijek sljedeće tvrdnje, gdje pod "iskaz" uvijek mislimo na uži pojam iz uvoda zadatka:

1. Svaki iskaz, osim možda tautologije i kontradikcije, i njegova negacija su jednako informativni. DA / NE
2. Iskaz $A \leftrightarrow (B \rightarrow (A \wedge C))$ je informativniji od iskaza $B \wedge (A \vee C)$. DA / NE
3. Neka tautologija informativnija je od svake kontradikcije. DA / NE
4. Iskaz $A \vee (A \rightarrow A)$ informativniji je od svake tautologije. DA / NE
5. Postoji iskaz informativniji od iskaza A. DA / NE
6. Iskazi $\neg A \rightarrow B$ i $B \vee C$ su jednako informativni. DA / NE
7. Ako su dva iskaza $\mathbf{I}$ i $\mathbf{J}$, koji od jednostavnih iskaza sadrže samo A i B, jednako informativni, onda vrijedi da su iskazi $\mathbf{I} \wedge C$ i $\mathbf{J} \wedge C$ jednako informativni.[1] DA / NE
8. Ako su iskazi $\mathbf{I}$ te $\mathbf{J}$ jednako informativni, onda su jednako informativni i s $\mathbf{I} \wedge \mathbf{J}$. DA / NE
9. Ako su iskazi $\mathbf{I}$ te $\mathbf{J}$ jednako informativni, onda su jednako informativni i s $\mathbf{I} \vee \mathbf{J}$. DA / NE
10. Ako su iskazi $\mathbf{I}$ te $\mathbf{J}$ jednako informativni, onda su jednako informativni i s $\mathbf{I} \leftrightarrow \mathbf{J}$. DA / NE
11. Ako je iskaz $\mathbf{I}$ strogo informativniji od iskaza $\mathbf{J}$, postoji iskaz $\mathbf{K}$ koji je strogo informativniji od $\mathbf{I}$, a od kojeg je $\mathbf{J}$ strogo informativniji. DA / NE
12. Ako iz jednog iskaza slijedi drugi, prvi je informativniji od drugog. DA / NE
13. Ako iz jednog iskaza slijedi drugi, drugi je informativniji od prvog. DA / NE
14. Ako je iskaz $\mathbf{I}$ informativniji od iskaza $\mathbf{I}'$, a $\mathbf{J}$ informativniji od $\mathbf{J}'$, onda je iskaz $\mathbf{I} \wedge \mathbf{J}$ informativniji od $\mathbf{I}' \wedge \mathbf{J}'$. DA / NE
15. Ako je iskaz $\mathbf{I}$ informativniji od iskaza $\mathbf{I}'$, a $\mathbf{J}$ informativniji od $\mathbf{J}'$, onda je iskaz $\mathbf{I} \vee \mathbf{J}$ informativniji od $\mathbf{I}' \vee \mathbf{J}'$. DA / NE
16. Ako je iskaz $\mathbf{I}$ informativniji od iskaza $\mathbf{I}'$, a $\mathbf{J}$ informativniji od $\mathbf{J}'$, onda je iskaz $\mathbf{I} \wedge \mathbf{J}$ informativniji od $\mathbf{I}' \vee \mathbf{J}'$. DA / NE
17. Ako je iskaz $\mathbf{I}$ informativniji od iskaza $\mathbf{I}'$, a $\mathbf{J}$ informativniji od $\mathbf{J}'$, onda je iskaz $\mathbf{I} \vee \mathbf{J}$ informativniji od $\mathbf{I}' \wedge \mathbf{J}'$. DA / NE
18. Neka je dano 9 iskaza $\mathbf{I_1}, \ldots, \mathbf{I_9}$, te je u svakom paru susjednih iskaza u nizu prvi strogo informativniji od drugoga. Tada $\mathbf{I_5}$ i $\mathbf{I_6}$ nisu međusobno isključni. DA / NE
19. Iskazi su definirani kao ranije. Svaki je iskaz informativniji od iskaza $\mathbf{I_2} \rightarrow \mathbf{I_4}$. DA / NE
20. Iskazi su definirani kao ranije. Svaki je iskaz informativniji od iskaza $\mathbf{I_4} \rightarrow \mathbf{I_9}$. DA / NE

(20×3 boda = 60 bodova)

[1] Izrazom $\mathbf{I} \wedge C$, naravno, podrazumijevamo iskaz dobiven iz tog izraza zamjenom simbola $\mathbf{I}$ s iskazom $\mathbf{I}$; a ne iskaz čiji su jednostavni iskazi $\mathbf{I}$ te C (po definiciji iskaza u ovom zadatku, to i ne bi bio iskaz). U nastavku zadatka nećemo posebno isticati analogna zlorabljenja notacije.

Zadatak 6. Sljedeće podzadatke riješite koristeći sustav prirodne dedukcije. **Kako postoje različite konvencije oko detalja u prirodnoj dedukciji, dobro proučite pravila u prilogu (na posljednjim stranicama testa).**

1. Riješite jedan od sljedećih zadataka. **Boduje se samo jedno rješenje po podzadatku.**
   (a) (50 bodova) Napišite dokaz tautologije $(A \to B) \vee (B \to A)$.
   (b) (25 bodova) Napišite dokaz tautologije $((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow (A \to (B \to C))$.
2. Riješite jedan od sljedećih zadataka. **Boduje se samo jedno rješenje po podzadatku.**
   (a) (50 bodova) Napišite izvod formule $\forall x \exists y \neg Rxy$ iz premise $\forall x(\exists y(Rxy \wedge \forall z Ryz) \to \exists y \neg Rxy)$.
   (b) (40 bodova) Napišite izvod formule $\exists x(Px \to (\neg Px \leftrightarrow Rxx))$ iz premise $Rcc \to (\forall x Px \wedge \exists y(Py \to \exists z \neg Pz))$.

Uočite da unutar svakog podzadatka dedukcije nose različit broj bodova. Ako u nekom podzadatku napišete rješenja za obje ponuđene dedukcije, naznačite za koje rješenje želite da se boduje.

Dedukcije pišite na prazne papire **koji su zaklamani na kraju testa prije priloga**. Rješenja napisana na drugim mjestima ne prihvaćaju se.

(2×50 bodova = 100 bodova)

Bodovanje. Ukratko, **boduju se samo točna rješenja i rješenja koja su vrlo bliska nekom točnom rješenju**, pri čemu ispravnost opravdanja ne ulazi u taj uvjet za bodovanje rješenja. Precizna pravila bodovanja:

- Ako nema rješenja, podzadatak nosi jedan bod.
- Inače, kako biste dobili bodove, ako dedukcija nije u potpunosti točna, mora se moći popraviti. Popravljanje se mora moći izvesti uz najviše tri *promjene formula* i neograničen broj *promjena opravdanja*.
- *Promjena formule* je umetanje retka s novom formulom ili izmjena formule u postojećem retku u dedukciji. Nazovimo sve takve retke modificiranima. Popravljanje dedukcije, uz već navedeno, ne smije rezultirati s tri uzastopna modificirana retka.[2]
- *Promjena opravdanja* je dodavanje ili ispravljanje opravdanja u nekom retku, u odnosu na početni dokaz. Smatra se da je opravdanje u modificiranom retku uvijek pogrešno (traži promjenu).
- Smatra se da brojevi u opravdanjima referiraju na stanje prije popravljanja (nemojte pokušavati pogoditi ispravne brojeve redaka nakon ispravljanja). Pojedina promjena formule nosi -3 boda. Pojedina promjena opravdanja nosi -1 bod.
- Veličina dedukcije i (ne)postojanje redaka koji se ne koriste kasnije u dokazu ne utječu (izravno) na broj bodova.

[2] Postojanje ili ispravnost opravdanja ne utječe na ovaj uvjet.

Rješenje Zadatka 6.

Rješenje Zadatka 6.

PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (1/2)

- Dedukcija može biti izvod ili dokaz. Izvod počinje jednom ili više premisa odvojenih od ostatka izvoda vodoravnom crtom. Dokaz uvijek započinje podizvodom. Primjere možete vidjeti na dnu sljedeće stranice.
- Opravdanja se sastoje od tri informacije: veznik, slovo u/i (za uvođenje/isključenje), te jedan ili više brojeva ili brojevnih raspona. Te tri informacije mogu biti odijeljene razmakom, zarezom, kosom crtom itd. Njihov je poredak proizvoljan (to se ne odnosi na interni poredak brojeva). Reiteracija odstupa od ovog pravila.
- Kod nekih je pravila poredak premisa proizvoljan, što je signalizirano **zvjezdicom**. Kod takvih se pravila iznimno dopušta i proizvoljan poredak u zapisu brojeva u opravdanju. Primjerice, kod uvođenja konjunkcije, redak *b* mogao se pojaviti prije retka *a*, a u opravdanju je moglo pisati ∧u, b, a. Dakle, postoje četiri verzije pravila ∧u. Slično vrijedi za ostala pravila sa zvjezdicom.
- Tri točkice signaliziraju da su na njihovu mjestu možda još neki redci osim upisanih.

Reiteracija (opetovanje).

$$\begin{array}{r|ll} \text{a} & A & \\ & \vdots & \\ & A & \text{re., a (ili op., a)} \end{array}$$

Uvođenje konjunkcije. *

$$\begin{array}{r|ll} \text{a} & A & \\ & \vdots & \\ \text{b} & B & \\ & \vdots & \\ & A \land B & \land\text{u, a, b} \end{array}$$

Uvođenje disjunkcije.

$$\begin{array}{r|ll} \text{a} & A & \\ & \vdots & \\ & A \lor B & \lor\text{u, a} \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} \text{b} & B & \\ & \vdots & \\ & A \lor B & \lor\text{u, b} \end{array}$$

Uvođenje kondicionala.

$$\begin{array}{r|l|ll} \text{a} & & \underline{A} & \text{pretp.} \\ & & \vdots & \\ \text{b} & & B & \\ & \multicolumn{2}{l}{A \to B} & \to\text{u, a-b} \end{array}$$

Uvođenje bikondicionala.

$$\begin{array}{r|l|ll} \text{a} & & \underline{A} & \text{pretp.} \\ & & \vdots & \\ \text{b} & & B & \\ \text{c} & & \underline{B} & \text{pretp.} \\ & & \vdots & \\ \text{d} & & A & \\ & \multicolumn{2}{l}{A \leftrightarrow B} & \leftrightarrow\text{u, a-b, c-d} \end{array}$$

Uvođenje kontradikcije. *

$$\begin{array}{r|ll} \text{a} & A & \\ & \vdots & \\ \text{b} & \neg A & \\ & \vdots & \\ & \bot & \bot\text{u, a, b} \end{array}$$

Uvođenje negacije.

$$\begin{array}{r|l|ll} \text{a} & & \underline{A} & \text{pretp.} \\ & & \vdots & \\ \text{b} & & \bot & \\ & \multicolumn{2}{l}{\neg A} & \neg\text{u, a-b} \end{array}$$

Isključenje konjunkcije.

$$\begin{array}{r|ll} \text{a} & A \land B & \\ & \vdots & \\ & A & \land\text{i, a} \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} \text{b} & A \land B & \\ & \vdots & \\ & B & \land\text{i, b} \end{array}$$

Isključenje disjunkcije.

$$\begin{array}{r|l|ll} \text{d} & \multicolumn{2}{l}{A \lor B} & \\ \text{a} & & \underline{A} & \text{pretp.} \\ & & \vdots & \\ \text{c}_1 & & C & \\ \text{b} & & \underline{B} & \text{pretp.} \\ & & \vdots & \\ \text{c}_2 & & C & \\ & \multicolumn{2}{l}{C} & \lor\text{i, d, a-c}_1\text{, b-c}_2 \end{array}$$

Isključenje kondicionala. *

$$\begin{array}{r|ll} \text{c} & A \to B & \\ & \vdots & \\ \text{a} & A & \\ & \vdots & \\ & B & \to\text{i, c, a} \end{array}$$

Isključenje bikondicionala. *

$$\begin{array}{r|ll} \text{c} & A \leftrightarrow B & \\ & \vdots & \\ \text{a} & A & \\ & \vdots & \\ & B & \leftrightarrow\text{i, c, a} \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} \text{c} & A \leftrightarrow B & \\ & \vdots & \\ \text{b} & B & \\ & \vdots & \\ & A & \leftrightarrow\text{i, c, b} \end{array}$$

Isključenje kontradikcije.

$$\begin{array}{r|ll} \text{a} & \bot & \\ & \vdots & \\ & A & \bot\text{i, a} \end{array}$$

Isključenje negacije.

$$\begin{array}{r|ll} \text{a} & \neg\neg A & \\ & \vdots & \\ & A & \neg\text{i, a} \end{array}$$

PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (2/2)

- U nastavku navodimo pravila za kvantifikatore (količitelje). Zbog jednostavnosti, ovdje se ograničavamo na logiku prvog reda bez funkcijskih simbola. Pravila su zbog preciznosti opisana apstraktnije nego što ste možda učili u školi, no vrlo vjerojatno su to suštinski ista pravila. **Na dnu je primjer konkretnog dokaza.**
- Neka je A formula koja možda sadrži pojave (javljanja, nastupe) neke varijable x.
  - Označimo s $A(t/x)$ formulu jednaku formuli A, osim što je **svaka** slobodna pojava varijable x u A zamijenjena pojavom (pseudo)konstante t.
- Neka je A formula koja možda sadrži pojave neke (pseudo)konstante t.
  - Označimo s $A(x/t)$ formulu jednaku formuli A, osim što je **svaka** pojava (pseudo)konstante t u A zamijenjena pojavom varijable x.
  - Označimo s $A(x//t)$ formulu jednaku formuli A, osim što je **nula ili više** pojava (pseudo)konstante t u A zamijenjeno pojavom varijable x.

Uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora.

a	A	
	$\vdots$	
	$\exists x A(x//t)$	$\exists$u, a

Ako formula A već sadrži kvantifikatore nad varijablom x, pojave t u A ne smiju biti u dosegu tih kvantifikatora.

Uvođenje univerzalnog kvantifikatora. *

a	A	
	$\vdots$	
	$\forall x A(x/t)$	$\forall$u, a

Pseudokonstanta t se pritom ne smije javljati u pretpostavci nekog (pod)dokaza koji još nije završen. Ako formula A već sadrži kvantifikatore nad varijablom x, pojave t u A ne smiju biti u dosegu tih kvantifikatora.

Isključenje egzistencijalnog kvantifikatora.

a	$\exists x A$	
	$\vdots$	
b	$\quad A(t/x)$	pretp.
	$\quad \vdots$	
c	$\quad B$	
	B	$\exists$i, a, b-c

Pseudokonstanta t se ne smije javljati u formulama u redcima ispred retka b, niti u formuli B.

Isključenje univerzalnog kvantifikatora.

a	$\forall x A$	
	$\vdots$	
	$A(t/x)$	$\forall$i, a

Dajemo primjer dokaza da je $(\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy) \lor Pc$ teorem. Dokaz je duži no što je potrebno, kako bismo demonstrirali primjenu svih pravila za kvantifikatore.

1	$\quad \exists x Rxx$	pretp.
2	$\quad\quad Raa$	pretp.
3	$\quad\quad \exists y Ray$	$\exists$u, 2
4	$\quad\quad \exists x \exists y Rxy$	$\exists$u, 3
5	$\quad \exists x \exists y Rxy$	$\exists$i, 1, 2-4
6	$\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy$	$\to$u, 1-5
7	$(\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy) \lor Pb$	$\lor$u, 6
8	$\forall z((\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy) \lor Pz)$	$\forall$u, 7
9	$(\exists x Rxx \to \exists x \exists y Rxy) \lor Pc$	$\forall$i, 8

Dajemo primjer izvoda formule $\neg\neg Pc$ iz formula Pc i $\neg Pd$.

1	Pc	pretp.
2	$\neg Pd$	pretp.
3	$\quad \neg Pc$	pretp.
4	$\quad \bot$	$\bot$u, 1, 3
5	$\neg\neg Pc$	$\neg$u, 3-4

DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE 2018.
A KATEGORIJA
RJEŠENJA

Zadatak 1.
a. 1. (3 boda)
b. 4. (3 boda)
c. kvantitete ili relacije. (3 boda - odgovor se priznaje ako je navedena bilo koja od predviđenih dviju maksima)
d. i. relacije; ii. kvantitete; iii. priznaje se jedno od: modaliteta ili relacije (3×3 boda)
e. Konvencionalne: 4; konverzacijske: 2, 3 (za 1 se priznaju oba rješenja) (4×3 boda)
Ukupno 30 bodova.

Zadatak 2.
1. a: N (npr. $F = G = H = B$), b: N (npr. $F = A \to B, G = B \to B$), c: I (ako postoji vrednovanje za koje je G neistinita, onda postoji i vrednovanje za koje je H neistinita; to je vrednovanje za koje je G neistinita osim što se istinitost od A postavi na istinitost od B)

2. a: I (objašnjenje kao u 1c), b: N (npr. $F = A \to A, H = A \to B$), c: I (G je tautologija, vidi 2a), d: N (zadatak ekvivalentan 2b), e: I (F je tautologija), f: N (primjer kao u 2b, G će biti $B \to B$), g: I (F je tautologija), h: I (G je tautologija, vidi 2a)

Ukupno 33 boda.

Zadatak 3.
Istinitosti u (a): (N), I, N, N, I
Istinitosti u (b): I, N, N, N, I
Istinitosti u (c): I, I, N, N, I
Ukupno 42 bodova.

Zadatak 4.

i. a. ✓; b. ✓; c. ×; d. ×; e. ✓; f. ×; g. ✓; h. ×; i. ✓; j. ✓; k. ×; l. ✓; m. ✓; n. ×; o. ×. (15×3 boda)
ii.

1. $A \wedge B \vDash A \vee B$

(1)	$A \vDash A$	a.
(2)	$A \wedge B \vDash A$	1, i.
(3)	$A \wedge B \vDash A \vee B$	2, l.

2. $A, A \to B \vDash B$

(1)	$A \vDash A$	a.
(2)	$B \vDash B$	a.
(3)	$A, B \vDash B$	2, b.
(4)	$A, A \to B \vDash B$	1, 3, e.

3. $\vDash A \to A$

(1)	$A \vDash A$	a.
(2)	$\vDash A \to A$	1, g.

Svaki točno ispunjen redak u dokazima donosi 1 bod. Ukupno 9 bodova.
iii.

1. $A, B \vee C \vDash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(1)	$A \vDash A$	a.
(2)	$A, B \vDash A$	1, b.
(3)	$B \vDash B$	a.
(4)	$A, B \vDash B$	3, b.
(5)	$A, B \vDash A \wedge B$	2, 4, j.
(6)	$A, B \vDash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	5, l.
(7)	$A, C \vDash A$	1, b.
(8)	$C \vDash C$	a.
(9)	$A, C \vDash C$	8, b.
(10)	$A, C \vDash A \wedge C$	7, 9, j.
(11)	$A, C \vDash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	10, l.
(12)	$A, B \vee C \vDash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	6, 11, m.

2. $(A \wedge B) \rightarrow C \vDash A \rightarrow (B \rightarrow C)$

(1)	$C \vDash C$	a.
(2)	$B, C \vDash C$	1, b.
(3)	$A, B, C \vDash C$	2, b.
(4)	$A \vDash A$	a.
(5)	$A, B \vDash A$	4, b.
(6)	$B \vDash B$	a.
(7)	$A, B \vDash B$	6, b.
(8)	$A, B \vDash A \wedge B$	5, 7, j.
(9)	$A, B, (A \wedge B) \rightarrow C \vDash C$	3, 8, e.
(10)	$A, (A \wedge B) \rightarrow C \vDash B \rightarrow C$	9, g.
(11)	$(A \wedge B) \rightarrow C \vDash A \rightarrow (B \rightarrow C)$	10, g.

Svaki točno ispunjen redak u dokazima donosi 1 bod. Ukupno 23 boda.
iv. p. $\times$; r. ✓; s ✓ (3×3 boda)
v.

1. $A \vDash \neg\neg A$

(1)	$A \vDash A$	a.
(2)	$\neg A, A \vDash \perp$	1, r.
(3)	$A \vDash \neg\neg A$	2, s.

2. $\neg A \vee \neg B \vDash \neg(A \wedge B)$

(1)	$A \vDash A$	a.
(2)	$A \wedge B \vDash A$	1, i.
(3)	$B \vDash B$	a.
(4)	$A \wedge B \vDash B$	3, i.
(5)	$\neg A, A \wedge B \vDash \perp$	2, r.
(6)	$\neg B, A \wedge B \vDash \perp$	4, r.
(7)	$\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vDash \perp$	5, 6, m.
(8)	$\neg A \vee \neg B \vDash \neg(A \wedge B)$	7, s.

3. $\neg B, A \rightarrow B \vDash \neg A$

(1)	$A \vDash A$	a.
(2)	$B \vDash B$	a.
(3)	$A, B \vDash B$	2, b.
(4)	$A, A \rightarrow B \vDash B$	1, 3, e.
(5)	$A, \neg B, A \rightarrow B \vDash \perp$	4, r.
(6)	$\neg B, A \rightarrow B \vDash \neg A$	5, s.

Svaki točno ispunjen redak u dokazima donosi 1 bod. Ukupno 19 bodova.

Ukupno 103 boda.

Zadatak 5.

1. n 2. n 3. n 4. i 5. i
6. i 7. i 8. n 9. n 10. n
11. n 12. i 13. n 14. n 15. n
16. i 17. n 18. i 19. n 20. i

Ukupno 60 bodova.

Zadatak 6.

1. (a)

1	$\neg((A \to B) \lor (B \to A))$	pretp.
2	A	pretp.
3	B	pretp.
4	A	re., 2
5	$B \to A$	$\to$u, 2-3
6	$(A \to B) \lor (B \to A)$	$\lor$u, 5
7	$\bot$	$\bot$u, 1, 6
8	$\neg A$	$\neg$u, 2-7
9	A	pretp.
10	$\bot$	$\bot$u, 8, 9
11	B	$\bot$i, 10
12	$A \to B$	$\to$u, 9-11
13	$(A \to B) \lor (B \to A)$	$\lor$u, 12
14	$\bot$	$\bot$u, 1, 13
15	$\neg\neg((A \to B) \lor (B \to A))$	$\neg$u, 1-14
16	$(A \to B) \lor (B \to A)$	$\neg$i, 15

50 bodova. Upute za bodovanje dane su u zadatku.

(b)

1	$(A \land B) \to C$	pretp.
2	A	pretp.
3	B	pretp.
4	$A \land B$	$\land$u., 2, 3
5	C	$\to$i, 1, 4
6	$B \to C$	$\to$u, 3-5
7	$A \to (B \to C)$	$\to$u, 2-6
8	$A \to (B \to C)$	pretp.
9	$A \land B$	pretp.
10	A	$\land$i, 9
11	$B \to C$	$\to$i, 8, 10
12	B	$\land$i, 9
13	C	$\to$i, 11, 12
14	$(A \land B) \to C$	$\to$u, 9-13
15	$((A \land B) \to C) \leftrightarrow (A \to (B \to C))$	$\leftrightarrow$u, 1-7, 8-14

25 bodova.

2. (a)

1	$\forall x(\exists y(Rxy \land \forall z Ryz) \to \exists y \neg Rxy)$	pretp.
2	$\neg \exists y \neg Ray$	pretp.
3	$\neg Rab$	pretp.
4	$\exists y \neg Ray$	∃u, 3
5	$\bot$	⊥u, 2, 4
6	$\neg\neg Rab$	¬u, 3-5
7	Rab	¬i, 6
8	$\forall z Raz$	∀u, 7
9	Raa	∀i, 8
10	$Raa \land \forall z Raz$	∧u, 8, 9
11	$\exists y(Ray \land \forall z Ryz) \to \exists y \neg Ray$	∀i, 1
12	$\exists y(Ray \land \forall z Ryz)$	∃u, 10
13	$\exists y \neg Ray$	→i, 11, 12
14	$\bot$	⊥u, 2, 13
15	$\neg\neg\exists y \neg Ray$	¬u, 2-14
16	$\exists y \neg Ray$	¬i, 15
17	$\forall x \exists y \neg Rxy$	∀u, 16

50 bodova.

(b)

1	$Rcc \to (\forall x Px \land \exists y(Py \to \exists z \neg Pz))$	pretp.
2	Pc	pretp.
3	$\neg Pc$	pretp.
4	$\bot$	⊥u, 2, 3
5	Rcc	⊥i, 4
6	Rcc	pretp.
7	$\forall x Px \land \exists y(Py \to \exists z \neg Pz)$	→i, 1, 6
8	$\exists y(Py \to \exists z \neg Pz)$	∧i, 7
9	$Pa \to \exists z \neg Pz$	pretp.
10	$\forall x Px$	∧i, 7
11	Pa	∀i, 10
12	$\exists z \neg Pz$	→i, 9, 11
13	$\neg Pb$	pretp.
14	Pb	∀i, 10
15	$\bot$	⊥u, 13, 14
16	$\bot$	∃i, 12, 13-15
17	$\bot$	∃i, 8, 9-16
18	$\neg Pc$	⊥i, 17
19	$\neg Pc \leftrightarrow Rcc$	↔u, 3-5, 6-18
20	$Pc \to (\neg Pc \leftrightarrow Rcc)$	→u, 2-19
21	$\exists x(Px \to (\neg Px \leftrightarrow Rxx))$	∃u, 20

40 bodova.

Ukupno 100 bodova.