

DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE

8.-10. svibnja 2019.

BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA*
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD*
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA*

*Osim ako je u uputi u zadatku navedeno drugačije.

A KATEGORIJA

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAX BODOVA
1.		27
2.		36
3.		30
4.		95
UKUPNO		188

Vrijeme rješavanja testa: 120 minuta

Zadatak 1.

Dovršite sljedeće rečenice podcrtavanjem ili zaokruživanjem. Svaki potpuno točno ispunjen podzadatak nosi **3 boda**, izostanak rješenja **1 bod**, a inače podzadatak nosi **-3 boda**. U slučaju negativnog ukupnog broja bodova, cijeli zadatak donosi 0 bodova.

1. Formula $A \rightarrow \neg A$ je **samo zadovoljiva (ispunjiva) / samo nevaljana (oboriva) / i ispunjiva i nevaljana / niti ispunjiva niti nevaljana**.
2. Ako znamo da je formula $\neg A \wedge \neg\neg A$ konjunkt u nekoj konjunkciji, a ne znamo što je drugi konjunkt, *nije isključeno* da je cijela konjunkcija: **valjana / nevaljana / zadovoljiva / nezadovoljiva / ništa od navedenog** (označite sve što može vrijediti).
3. Ako znamo da je formula $A \vee B$ konjunkt u nekoj konjunkciji, a ne znamo što je drugi konjunkt, na temelju toga **jest / nije** isključeno da je cijela konjunkcija istovrijedna (ekvivalentna) formuli $B \vee C$.
4. Za barem jednu formulu s kvantifikatorima (količiteljima) koja nije kontradikcija, **postoji / ne postoji** njoj istovrijedna formula bez kvantifikatora.
5. Iz *knjiga je velika osim ako je dosadna* **slijedi / ne slijedi** ako *knjiga nije dosadna, nije ni velika*.
6. Za **neke / sve** parove pojmova jednakog sadržaja, vrijedi da su im i opsezi jednaki.
7. Pretpostavimo da smo započeli istinitosno stablo s neke dvije formule (jedna ispod druge na vrhu stabla), te da su (nakon rješavanja) sve grane tog stabla zatvorene. Na temelju toga **možemo / ne možemo** isključiti mogućnost da su početne dvije formule ekvivalentne.
8. Pretpostavimo da želimo ispitati je li ili nije neka formula iskazne logike: valjana, nevaljana, zadovoljiva i nezadovoljiva. Označite svojstva za koja vrijedi da sigurno možemo zaključiti posjeduje li ih dana formula samo na temelju istinitosnog stabla započetog tom formulom, kao i samo na temelju istinitosnog stabla započetog negacijom te formule: **valjana / nevaljana / zadovoljiva / nezadovoljiva / ništa od navedenog**
9. Ako mačka Annie mjauče, a mačka Frozen prede, onda **slijedi / ne slijedi** sljedeće: Annie i Frozen su istovjetne samo ako Annie prede, a Frozen mjauče.

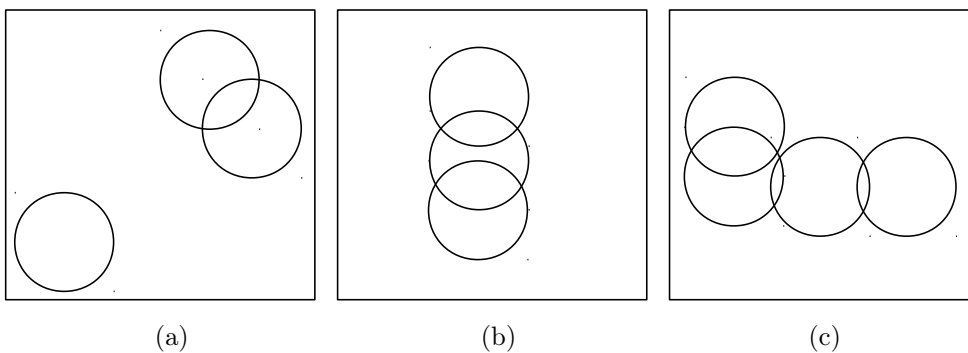
(9×3 boda = 27 bodova)

Zadatak 2.

Zadana su sljedeća tri modela (situacije). U svakom modelu domenu (predmetno područje) čine tri ili četiri ucrtana kruga. Relacijske simbole P , S i L interpretiramo na sljedeći način:

- $Pxy \dots$ postoji točka koja je i u krugu x i u krugu y ;
- $Sxy \dots$ postoji točka koja je i u krugu x i u krugu y , i pritom x i y nisu jedan te isti krug;
- $Lxy \dots$ postoji točka u krugu x koja je lijevo od svake točke kruga y .

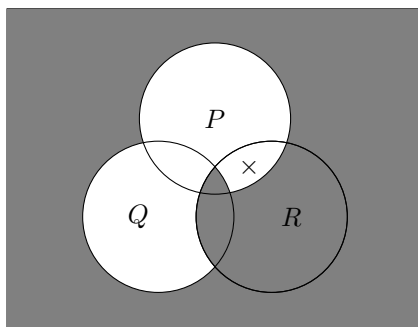
Odredite istinitost (upišite I ili N) donjih formula u svakom modelu:



Formula	Istinitost u (a)	Istinitost u (b)	Istinitost u (c)
$\forall x \forall y \forall z ((Pxy \wedge Pxz) \rightarrow Pyz)$			
$\forall x \forall y ((\exists z Sxz \wedge \exists z Syz) \rightarrow \exists z (Pxz \wedge Pyz))$			
$\forall x \exists y Sxy \rightarrow \exists y \forall x Pyx$			
$\exists x \forall y \forall z (Lyz \rightarrow (Lxz \wedge \neg Sxy))$			

(12×3 boda = 36 bodova)

Zadatak 3.



Na temelju gornjega dijagrama odgovorite jesu li sljedeći iskazi istiniti (I), neistiniti (N) ili im se na temelju dijagrama ne može utvrditi istinitosna vrijednost (?):

1. $\forall x(\neg Px \rightarrow Qx) \wedge \exists xRx$ _____
2. $(\forall xQx \rightarrow \neg\exists xRx) \rightarrow \forall x(Rx \rightarrow Qx)$ _____
3. $\forall x(Rx \rightarrow Px) \leftrightarrow \forall x(\neg Qx \rightarrow Rx)$ _____
4. $\neg\exists x(Px \wedge Qx) \rightarrow \forall x(\neg Px \rightarrow Qx)$ _____
5. $\forall x(\neg Qx \rightarrow Rx) \vee \exists x\neg(Px \rightarrow \neg Qx)$ _____
6. $\exists x(Px \wedge Qx) \rightarrow \neg\exists x(Px \vee Qx)$ _____
7. $\forall y((\exists x\neg Qx \rightarrow \forall xPx) \rightarrow (Qy \rightarrow Qy))$ _____
8. $\forall x(Qx \rightarrow \neg\forall y\neg Qy) \wedge \neg(\forall y\neg Qy \rightarrow \neg\exists xQx)$ _____
9. $\exists x(Rx \wedge \neg Qx) \leftrightarrow \exists y(Qy \wedge \neg Ry)$ _____
10. $\forall y(\forall z(\neg Qz \rightarrow Rz) \rightarrow (Qy \vee Ry))$ _____

(10×3 boda = 30 bodova)

Zadatak 4. Sljedeće podzadatke riješite koristeći sustav prirodne dedukcije. **Kako postoje različite konvencije oko detalja u prirodnoj dedukciji, dobro proučite pravila u prilogu (na posljednjim stranicama testa).**

1. Riješite jedan od sljedećih zadataka. **Boduje se samo jedno rješenje po podzadatku.**

(a) (40 bodova) Napišite dokaz tautologije $\neg(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow (A \vee \neg B))$.

(b) (30 bodova) Napišite dokaz tautologije $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \vee B) \rightarrow C)$.

2. Riješite jedan od sljedećih zadataka. **Boduje se samo jedno rješenje po podzadatku.**

(a) (55 bodova) Napišite izvod formule $\exists x \forall y (Rxy \rightarrow Sxy)$ iz premisa $\forall x (\exists y Rxy \leftrightarrow \forall y \neg Sxy)$ te $\forall y \exists x Sxy$.

(b) (35 bodova) Napišite dokaz tautologije $((\neg A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C)$.

Uočite da unutar svakog podzadatka dedukcije nose različit broj bodova. Ako u nekom podzadatku napišete rješenja za obje ponuđene dedukcije, naznačite za koje rješenje želite da se boduje.

Dedukcije pišite na prazne papire **koji su zaklamani na kraju testa prije priloga**. Rješenja napisana na drugim mjestima ne prihvaćaju se.

((najviše) 40 + (najviše) 55 bodova = (najviše) 95 bodova)

Bodovanje. Ukratko, **boduju se samo točna rješenja i rješenja koja su vrlo bliska nekom točnom rješenju**, pri čemu ispravnost opravdanja ne ulazi u taj uvjet za bodovanje rješenja. Precizna pravila bodovanja:

- U slučaju izostanka rješenja, podzadatak nosi 10 bodova.
- Inače, kako biste dobili bodove, ako dedukcija nije u potpunosti točna, mora se moći popraviti. Popravljanje se mora moći izvesti uz najviše tri promjene formula i neograničen broj promjena opravdanja.
- *Promjena formule* je umetanje retka s novom formulom ili izmjena formule u postojećem retku u dedukciji. Nazovimo sve takve retke modificiranima. Popravljanje dedukcije, uz već navedeno, ne smije rezultirati s tri uzastopna modificirana retka.¹
- *Promjena opravdanja* je dodavanje ili ispravljanje opravdanja u nekom retku, u odnosu na početni dokaz. Smatra se da je opravdanje u modificiranom retku uvijek pogrešno (traži promjenu).
- Smatra se da brojevi u opravdanjima referiraju na stanje prije popravljanja (nemojte pokušavati pogoditi ispravne brojeve redaka nakon ispravljanja). Ako je maksimalan predviđen broj bodova M , minimalan broj potrebnih promjena formule f , a opravdanja o , podzadatak nosi $M - 3f^2 - o$ bodova.
- Veličina dedukcije i (ne)postojanje redaka koji se ne koriste kasnije u dokazu ne utječu (izravno) na broj bodova.

¹Postojanje ili ispravnost opravdanja ne utječe na ovaj uvjet.

Rješenje Zadatka 4.

Rješenje Zadatka 4.

PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (1/2)

- Dedukcija može biti izvod ili dokaz. Izvod počinje jednom ili više (glavnih) premisa odvojenih od ostatka izvoda vodoravnom crtom. Dokaz nema (glavnih) premisa, što znači da uvijek započinje podizvodom. Primjere možete vidjeti na dnu sljedeće stranice.
- Opravdanja se sastoje od tri podatka: simbol veznika, slovo u ili i (za uvođenje/isključenje), te jedan ili više brojeva ili brojevnih raspona. Te tri informacije mogu biti odijeljene razmakom, zarezom, kosom crtom ili nekako drugačije. Poredak te tri informacije proizvoljan je (to ne znači da je poredak brojeva proizvoljan). Iznimno, reiteracija (opetovanje) ne sadrži slovo u ili i.
- Kod nekih je pravila poredak premisa iz kojih slijede proizvoljan, što je signalizirano **zvjezdicom**. Kod takvih se pravila iznimno dopušta i proizvoljan poredak u zapisu brojeva u opravdanju. Primjerice, kod uvođenja konjunkcije, redak rednog broja k mogao se pojaviti prije retka rednog broja j , a u opravdanju je u oba slučaja moglo pisati $\wedge u, j, k$ ili $\wedge u, k, j$. U sva četiri slučaja, pravilo zovemo $\wedge u$.
- Tri točkice signaliziraju da su na njihovu mjestu možda još neki redci osim upisanih.

Uvođenje konjunkcije. *

j	A	
	⋮	
k	B	
	⋮	
	A ∧ B	∧u, j, k

Uvođenje disjunkcije.

j	A		j	B	
	⋮			⋮	
	A ∨ B	∨u, j		A ∨ B	∨u, j

Uvođenje kondicionala.

j	A	pretp.	
	⋮		
k	B		
	A → B	→u, j-k	

Uvođenje bikondicionala.

j	A	pretp.	
	⋮		
k	B		
m	B	pretp.	
	⋮		
n	A		
	A ↔ B	↔u, j-k, m-n	

Uvođenje kontradikcije. *

j	A	
	⋮	
k	¬A	
	⋮	
	⊥	⊥u, j, k

Uvođenje negacije.

j	A	pretp.	
	⋮		
k	⊥		
	¬A	¬u, j-k	

Isključenje konjunkcije.

j	A ∧ B		j	A ∧ B	
	⋮			⋮	
	A	∧i, j		B	∧i, j

Isključenje disjunkcije.

e	A ∨ B	
	⋮	
j	A	pretp.
	⋮	
k	C	
m	B	pretp.
	⋮	
n	C	
	C	∨i, e, j-k, m-n

Isključenje kondicionala. *

j	A → B	
	⋮	
k	A	
	⋮	
	B	→i, j, k

Isključenje bikondicionala. *

j	A ↔ B		j	A ↔ B	
	⋮			⋮	
k	A		k	B	
	⋮			⋮	
	B	↔i, j, k		A	↔i, j, k

Isključenje kontradikcije.

j	⊥	
	⋮	
	A	⊥i, j

Isključenje negacije.

j	¬¬A	
	⋮	
	A	¬i, j

Reiteracija (opetovanje).

j	A	
	⋮	
	A	re., j (ili op., j)

PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (2/2)

- U nastavku navodimo pravila za kvantifikatore (količitelje). Koristimo logiku prvog reda bez funkcijskih simbola. Pravila su (zbog preciznosti) opisana apstraktnije nego što ste možda učili u školi, no suštinski su to ista pravila. **Na dnu je primjer konkretnog dokaza.**
- Neka je A formula koja možda sadrži pojave (javljanja, nastupe) neke varijable x .
 - Označimo s $A(t/x)$ formulu jednaku formuli A , osim što je **svaka** slobodna pojava varijable x u A zamijenjena pojavom (pseudo)konstante t .
- Neka je A formula koja možda sadrži pojave neke (pseudo)konstante t .
 - Označimo s $A(x/t)$ formulu jednaku formuli A , osim što je **svaka** pojava (pseudo)konstante t u A zamijenjena pojavom varijable x .
 - Označimo s $A(x//t)$ formulu jednaku formuli A , osim što je **nula ili više** pojava (pseudo)konstante t u A zamijenjeno pojavom varijable x .

Uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora.

j	A	
	⋮	
	$\exists x A(x//t)$	$\exists u, j$

Ako formula A već sadrži kvantifikatore nad varijablom x , pojave t u A ne smiju biti u doseg tih kvantifikatora.

Uvođenje univerzalnog kvantifikatora.

j	A	
	⋮	
	$\forall x A(x/t)$	$\forall u, j$

Pseudokonstanta t se pritom ne smije javljati u pretpostavci nekog (pod)dokaza koji još nije završen. Ako formula A već sadrži kvantifikatore nad varijablom x , pojave t u A ne smiju biti u doseg tih kvantifikatora.

Isključenje egzistencijalnog kvantifikatora.

j	$\exists x A$							
	⋮							
k	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A(t/x)$</td> <td style="padding-left: 5px;">pretp.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">⋮</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B</td> <td></td> </tr> </table>	$A(t/x)$	pretp.	⋮		B		
$A(t/x)$	pretp.							
⋮								
B								
m	B	$\exists i, j, k-m$						

Pseudokonstanta t se ne smije javljati u formulama u redcima ispred retka k , niti u formuli B .

Isključenje univerzalnog kvantifikatora.

j	$\forall x A$	
	⋮	
	$A(t/x)$	$\forall i, j$

Dajemo primjer dokaza da je formula $(\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy) \vee Pc$ teorem. Dokaz je duži no što je potrebno, kako bismo demonstrirali primjenu svih pravila za kvantifikatore.

1	$\exists x Rxx$	pretp.		
2	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">Raa</td> <td style="padding-left: 5px;">pretp.</td> </tr> </table>	Raa	pretp.	
Raa	pretp.			
3	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\exists y Ray$</td> <td style="padding-left: 5px;">$\exists u, 2$</td> </tr> </table>	$\exists y Ray$	$\exists u, 2$	
$\exists y Ray$	$\exists u, 2$			
4	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\exists x \exists y Rxy$</td> <td style="padding-left: 5px;">$\exists u, 3$</td> </tr> </table>	$\exists x \exists y Rxy$	$\exists u, 3$	
$\exists x \exists y Rxy$	$\exists u, 3$			
5	$\exists x \exists y Rxy$	$\exists i, 1, 2-4$		
6	$\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy$	$\rightarrow u, 1-5$		
7	$(\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy) \vee Pb$	$\vee u, 6$		
8	$\forall z ((\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy) \vee Pz)$	$\forall u, 7$		
9	$(\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy) \vee Pc$	$\forall i, 8$		

Dajemo primjer izvoda formule $\neg\neg Pc$ iz formula Pc i $\neg Pd$.

1	Pc	pretp.		
2	$\neg Pd$	pretp.		
3	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\neg Pc$</td> <td style="padding-left: 5px;">pretp.</td> </tr> </table>	$\neg Pc$	pretp.	
$\neg Pc$	pretp.			
4	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">\perp</td> <td style="padding-left: 5px;">$\perp u, 1, 3$</td> </tr> </table>	\perp	$\perp u, 1, 3$	
\perp	$\perp u, 1, 3$			
5	$\neg\neg Pc$	$\neg u, 3-4$		

DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE 2019.

A KATEGORIJA

RJEŠENJA

Zadatak 1.

1. i ispunjiva i nevaljana
2. nevaljana, nezadovoljiva
3. jest (kakva god bila konjunkcija, ako je C istinito, A, B neistinito, prva formula je neistinita, druga istinita)
4. postoji (npr. $A \vee \neg A, \forall x Px \vee \neg \forall x Px$)
5. ne slijedi
6. sve
7. ne možemo
8. ništa od navedenog
9. slijedi

Ukupno 27 bodova.

Zadatak 2.

Formula	Istinitost u (a)	Istinitost u (b)	Istinitost u (c)
$\forall x \forall y \forall z ((Pxy \wedge Pxz) \rightarrow Pyz)$	I	N	N
$\forall x \forall y ((\exists z Sxz \wedge \exists z Syz) \rightarrow \exists z (Pxz \wedge Pyz))$	I	I	N
$\forall x \exists y Sxy \rightarrow \exists y \forall x Pyx$	I	I	N
$\exists x \forall y \forall z (Lyz \rightarrow (Lxz \wedge \neg Sxy))$	I	I	N

Ukupno 36 bodova.

Zadatak 3.

1. I, 2. N, 3. ?, 4. I, 5. ?, 6. ?, 7. I, 8. N, 9. ?, 10. I.

Ukupno 30 bodova.

Zadatak 4

1. (a)

1	$\neg(A \leftrightarrow \neg B)$	pretp.
2	B	pretp.
3	$\neg A$	pretp.
4	A	pretp.
5	\perp	\perp u, 4, 3
6	$\neg B$	\perp i, 5
7	$\neg B$	pretp.
8	\perp	\perp u, 2, 7
9	A	\perp i, 8
10	$A \leftrightarrow \neg B$	\leftrightarrow u, 4-6, 7-9
11	\perp	\perp u, 10, 1
12	$\neg \neg A$	\neg u, 3-11
13	A	\neg i, 12
14	$A \vee \neg B$	\vee u, 13
15	$B \rightarrow (A \vee \neg B)$	\rightarrow u, 2-14
16	$\neg(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow (A \vee \neg B))$	\rightarrow u, 1-15

40 bodova. Upute za bodovanje dane su u zadatku.

(b)

1	(A → B) → C	pretp.
2	¬A ∨ B	pretp.
3	A	pretp.
4	¬A	pretp.
5	⊥	⊥u, 3, 4
6	B	⊥i, 5
7	B	pretp.
8	B	op., 7
9	B	∨i, 2, 4-6, 7-8
10	A → B	→u, 3-9
11	C	→i, 1, 10
12	(¬A ∨ B) → C	→u, 2-11
13	((A → B) → C) → ((¬A ∨ B) → C)	→u, 1-12

30 bodova.

2. (a)

1	∀x(∃yRxy ↔ ∃y¬Sxy)	pretp.
2	∃y∃xSxy	pretp.
3	∃xSxb	∃i, 2
4	Sab	pretp.
5	Rac	pretp.
6	∃yRay	∃u, 5
7	∃yRay ↔ ∃y¬Say	∃i, 1
8	∃y¬Say	↔i, 7, 6
9	¬Sab	∃i, 8
10	⊥	⊥u, 4, 9
11	Sac	⊥i, 10
12	Rac → Sac	→u, 5-11
13	∃y(Ray → Say)	∃u, 12
14	∃x∃y(Rxy → Sxy)	∃u, 13
15	∃x∃y(Rxy → Sxy)	∃i, 3, 4-14

55 bodova.

(b)

1		$(\neg A \vee B) \rightarrow C$	pretp.
2		$A \rightarrow B$	pretp.
3		$\neg(\neg A \vee B)$	pretp.
4		$\neg A$	pretp.
5		$\neg A \vee B$	$\vee u, 4$
6		\perp	$\perp u, 5, 3$
7		$\neg\neg A$	$\neg u, 4-6$
8		A	$\neg i, 7$
9		B	$\rightarrow i, 2, 8$
10		$\neg A \vee B$	$\vee u, 9$
11		\perp	$\perp u, 10, 3$
12		$\neg\neg(\neg A \vee B)$	$\neg u, 3-11$
13		$\neg A \vee B$	$\neg i, 12$
14		C	$\rightarrow i, 1, 13$
15		$(A \rightarrow B) \rightarrow C$	$\rightarrow u, 2-14$
16		$((\neg A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C)$	$\rightarrow u, 1-15$

35 bodova.

Ukupno (najviše) 95 bodova.