

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ LOGIKE

29. siječnja 2019.

BODOVI*:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAX BODOVA
1.		18
2.		12
3.		15
4.		18
5.		21
6.		21
7.		21
UKUPNO		126

*Posebna napomena za bodovanje navedena je u 6. zadatku.

Vrijeme rješavanja testa: 60 minuta

Molimo vas da izaberete kategoriju natjecanja za međužupanijsko i državno natjecanje:

- A kategorija (obvezno za učenike prirodoslovno-matematičkih gimnazija, opcionalno za učenike svih ostalih škola)
- B kategorija

Uvod: U dalekoj budućnosti ljudi su se konačno odlučili na intergalaktičko putovanje kako bi istražili daleke svjetove pogodne za nastanjivanje. Po uzoru na računalo HAL 9000 iz jednog znanstveno-fantastičnog filma, od milja prozvano Hal, znanstvenici su odlučili stvoriti računalo Hal 2.0. U ovom ćete testu kroz različite zadatke pomoći znanstvenicima u programiranju i testiranju toga računala.

Napomena: svi su zadaci povezani isključivo tematski, ali ne nadovezuju se jedan na drugi te rješenje jednoga nije uvjetovano rješenjem drugoga.

Zadatak 1.

Kako bi provjerili osnovne funkcije glavnog računala, znanstvenici su ga nakon konstruiranja i uključivanja odlučili kratko testirati prije ugrađivanja u letjelicu i upoznavanja s članovima posade kako bi provjerili funkcionira li u skladu s pravilima moderne logike (tj. u kategoričkim sudovima se **ne pretpostavlja** nepraznost opsega subjekta). Računalo je dalo svoje odgovore, a kako biste pomogli znanstvenicima da provjere njegova rješenja, odredite vrijedi li:

1. Sud kontradiktoran sudu *Svi su ljudi dobri* podrazumijeva nepostojanje dobrog čovjeka. DA / NE
2. Iz suda *Neki su ljudi dobri* slijedi sud *Neki ljudi nisu dobri*. DA / NE
3. Iz suda *Neki čovjek nije dobar* slijedi sud *Nešto što nije dobro nije takvo da nije čovjek*. DA / NE
4. Iz suda *Svi ljudi su dobri* slijedi sud *Neki čovjek je dobar*. DA / NE
5. U logičkom kvadratu iz istinitosti O suda slijedi istinitost E suda, ali ne i obrnuto. DA / NE
6. U logičkom kvadratu iz istinitosti E suda slijedi istinitost O suda, ali ne i obrnuto. DA / NE

(6×3 boda = 18 bodova)

Zadatak 2.

Budući da je uloga Hala 2.0 uloga u misiji od životne važnosti za članove posade, izuzetno je važno da računalo uvijek govori istinu, neovisno o načinu na koji je iskaže. Stoga je njegov program testiran na konstruiranje tautologija prije nego li se podesi za informativnost.

Na prazne crte upišite ono što nedostaje da bi svaka od zadanih formula bila tautologija. Dozvoljeno je koristiti veznike \wedge , \vee , \rightarrow i \leftrightarrow , od kojih se svaki smije pojaviti u samo jednom od podzadataka i to samo jednom, te negaciju \neg i jednostavni iskaz P . Dvije ili više negacija ne smiju doći neposredno jedna za drugom.

1. $\underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}}) \leftrightarrow (P \rightarrow \neg P)$
2. $\neg(P \wedge \neg P) \leftrightarrow (\underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}})$
3. $\neg(P \wedge \neg P) \rightarrow (\underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}})$
4. $(\underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}}) \rightarrow \neg((P \rightarrow P) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow \neg P))$

(4×3 boda = 12 bodova)

Zadatak 3.

Ako se formule iskazne logike glavnog računala prilagode istovrijednim formulama, članovi posade moraju moći provjeriti njegove funkcije. Učinit će to tako da od Hala 2.0 zatraže da zaključi koje od formula na desnoj strani slijede iz formula na lijevoj strani.

Ako formula na desnoj strani slijedi iz formule na lijevoj strani, zaokružite "DA", a ako to nije slučaj, zaokružite "NE".

- | | | | |
|----|--|--|---------|
| a) | $(\neg P \wedge Q) \rightarrow Q$ | $P \vee Q$ | DA / NE |
| b) | $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \vee \neg P)$ | $P \wedge \neg Q$ | DA / NE |
| c) | $\neg(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q)$ | $Q \vee \neg P$ | DA / NE |
| d) | $P \leftrightarrow Q$ | $\neg((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q))$ | DA / NE |
| e) | $(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$ | $\neg(P \leftrightarrow Q)$ | DA / NE |

(5×3 boda = 15 bodova)

Zadatak 4.

Za Halovu 2.0 mogućnost provjere vlastitih stanja i operabilnosti definiran je novi dvomjesni veznik \uparrow .

Veznik \uparrow definiran je sljedećom istinitosnom tablicom:

P	Q	$P \uparrow Q$
I	I	N
I	N	I
N	I	I
N	N	I

1. Za navedene iskaze odredite radi li se o tautologijama (T), zadovoljivim iskazima koji nisu tautologije (Z) ili kontradikcijama (K).

- | | | |
|----|--|-----------|
| a) | $\left((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \uparrow (Q \uparrow Q)) \right) \wedge \left((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \uparrow (P \uparrow Q)) \right)$ | T / Z / K |
| b) | $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \left((P \uparrow Q) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \right)$ | T / Z / K |

2. Veznik \uparrow je izražajno potpun, što znači da Hal 2.0 sve iskaze iskazne logike može izraziti bez drugih veznika. Napišite ekvivalentne formule koristeći samo simbole: P , Q , \uparrow , $($, $)$. Svaki simbol zauzima točno jedno mjesto.

- | | | |
|----|--------------------|-----------------------------------|
| a) | $\neg P$ | ___ |
| b) | $P \wedge Q$ | (___ Q ___ (___ |
| c) | $\neg(P \wedge Q)$ | ___ |
| d) | $P \vee Q$ | ___ \uparrow ___ \uparrow ___ |

(6×3 boda = 18 bodova)

Zadatak 5.

Poznavanje semantike iznimno je važno za sve sudionike misije. Budući da su svemirska prostranstva ogromna i da ne postoje garancije da bi susret s drugom vrstom značio dijeljenje istog jezika, članovi posade i Hal 2.0 uvježbavaju nekonvencionalne logike.

Reći ćemo da je simbol na lijevoj (desnoj) strani veznika ako se nalazi neposredno (bez zagrada) uz njega na njegovoj lijevoj (desnoj) strani. Npr. u izrazu $(A \wedge B) \vee C$, A se nalazi na lijevoj strani veznika \wedge , B se nalazi na desnoj strani veznika \wedge , i C se nalazi na desnoj strani veznika \vee . Ni za jedan simbol u ovom izrazu ne smatramo da je “na lijevoj strani veznika \vee ”. Vrijedi sljedeće:

- Svaka je kružnica istinita.
- Pojedini trokut je istinit ako se nalazi na desnoj strani nekog veznika.
- Pojedini kvadrat nije istinit ako se nalazi unutar nekih zagrada.
- Pojedino srce nije istinito ako i samo ako je na lijevoj (desnoj) strani veznika na čijoj je desnoj (lijevoj) strani također neko srce.

Odredite istinitost sljedećih iskaza:

1. $\left(((\square \wedge \triangle) \rightarrow \circ) \wedge ((\triangle \rightarrow \circ) \vee (\square \rightarrow \circ)) \right) \rightarrow \circ$ I / N
2. $\left(((\triangle \wedge \circ) \rightarrow \triangle) \rightarrow (\circ \rightarrow \circ) \right) \rightarrow \circ$ I / N
3. $\left((\circ \wedge \triangle) \wedge (\square \wedge \square) \right) \rightarrow (\circ \wedge \circ)$ I / N
4. $\left((\heartsuit \vee \heartsuit) \wedge (\triangle \vee \triangle) \right) \vee \left((\circ \rightarrow \circ) \wedge (\triangle \vee \triangle) \right)$ I / N
5. $\left(\square \rightarrow (\triangle \rightarrow \square) \right) \wedge \left(\triangle \rightarrow (\square \rightarrow \triangle) \right)$ I / N
6. $\left((\square \rightarrow \heartsuit) \leftrightarrow (\square \wedge \heartsuit) \right) \rightarrow \left((\square \rightarrow \heartsuit) \leftrightarrow (\square \vee \heartsuit) \right)$ I / N
7. $\left(\circ \leftrightarrow \triangle \right) \leftrightarrow \left(((\circ \wedge \triangle) \vee (\circ \wedge \triangle)) \wedge ((\circ \rightarrow \triangle) \wedge (\triangle \rightarrow \circ)) \right)$ I / N

(7×3 boda = 21 bod)

Zadatak 6.

Za konačni test apstraktnog mišljenja na temelju kojeg će biti odlučeno tko će biti član posade u predviđenoj misiji, a tko ipak ne, znanstvenici su odlučili sastaviti sljedeći tekst:

(1) Nekoć davno postojale su dvije zemlje sklone sukobima i dvije miroljubive zemlje. (2) Zemlje Protagonija i Antagonija su bile ratoborne, a zemlje A i B su bile u miru. (3) Ako za zemlje A i B nije slučaj da su bile nezaraćene, vrijedi da su bile zaraćene. (4) Nije slučaj da su Antagonija i B u ratu, dakle ili Antagonija nije u ratu, ili B nije u ratu. (5) Nije bilo dobro za neku zemlju kada bi sve ostale kovale planove protiv nje. (6) Kada bi A i B kovale planove i kada bi Antagonija kovala planove, tada bi A kovala planove i B i Antagonija bi kovale planove. (7) Kada bi A kovala planove i ujedno Protagonija ili B kovale planove, to bi bilo isto kao i kada bi A i Protagonija kovale planove, ili kad bi A i B kovale planove. (8) Ako bi Protagonija kovala planove, onda bi smjesta Antagonija počela kovati planove ili Protagonija ne bi kovala planove ili bi pak Antagonija počela kovati planove. (9) Ako Protagonija kuje planove ako i samo ako Antagonija kuje planove, to povlači da ako Protagonija kuje planove, kuje ih i Antagonija i obratno. (10) Nakon nekog vremena čak su i Protagonija i Antagonija shvatile da je kovanje planova radi sukoba neisplativo i sve su se zemlje udružile u suradnji.

Pomozite znanstvenicima provjeriti dobivena rješenja. Pored donjih shema napišite broj u zagradi koji se nalazi ispred odgovarajuće rečenice. Ako pored sheme ne dolazi nijedan broj, crtu ostavite praznom. U tekstu se nalazi točno pet rečenica s nekom od sljedećih shema.

- a) $\neg\neg X \rightarrow X$ _____
- b) $\neg(X \wedge Y) \rightarrow (\neg X \vee \neg Y)$ _____
- c) $\neg(X \vee Y) \leftrightarrow (\neg X \wedge \neg Y)$ _____
- d) $(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$ _____
- e) $(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (\neg X \vee Y)$ _____
- f) $(X \leftrightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X))$ _____
- g) $((X \wedge Y) \rightarrow Z) \leftrightarrow (X \rightarrow (Y \rightarrow Z))$ _____
- h) $((X \wedge Y) \wedge Z) \rightarrow (X \wedge (Y \wedge Z))$ _____
- i) $((X \vee Y) \vee Z) \leftrightarrow (X \vee (Y \vee Z))$ _____
- j) $(X \wedge (Y \vee Z)) \leftrightarrow ((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z))$ _____
- k) $(X \vee (Y \wedge Z)) \leftrightarrow ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z))$ _____

Napomena o bodovanju: Točno pridruženi brojevi (na mjestima na kojima ih treba pridružiti) donose 3 boda. Izostanak rješenja, gdje pridruživanje nije moguće, donosi 1 bod. Neispravna pridruživanja ili izostanci pridruživanja tamo gdje ona trebaju doći donose 0 bodova. U slučaju da se cijeli zadatak ne riješi, donosi 5 bodova.

(5×3 boda + 6×1 bod = 21 bod)

Zadatak 7.

Kako Hal 2.0 ne bi ovisio samo o jednom grafemskom sustavu, njegov je program proširen drukčijom vrstom zapisivanja rečenica. Zadan mu je tzv. polugrafički zapis veznika iskazne logike.

Jednostavne iskaze bilježimo uobičajeno. Negaciju bilježimo tako da izraz okružimo zagradama, tj. ako želimo negirati iskaz A u polugrafičkom zapisu, napisat ćemo (A) . Sve zagrade u ovom zapisu imaju ulogu negiranja. Konjunkciju bilježimo nadovezivanjem, tj. ako želimo zapisati konjunkciju iskaza A i B u polugrafičkom zapisu, napisat ćemo AB .

Primjerice, za iskaz $(P \wedge \neg Q) \vee R$ možemo pomoću već poznatih logičkih ekvivalencija i gornjih pravila pronaći sljedeću ekvivalentnu formulu u polugrafičkom zapisu: $((P(Q))(R))$.

Prevedite sljedeće iskaze u polugrafičkoj interpretaciji u **najkraće** ekvivalentne formule iskazne logike, **ali** tako da među veznicima koristite **samo** \rightarrow i \neg .

- a) $(P)Q$ _____
- b) $((P))((Q))$ _____
- c) $(P(Q))((P)(Q))$ _____
- d) $((((P)(Q))(Q)))(Q(P))$ _____
- e) $(P((Q(R))))$ _____
- f) $(P(Q))(R)$ _____
- g) $((P(Q))(R))$ _____

(7×3 boda = 21 bod)