ŠKOLSKO NATJECANJE IZ LOGIKE
RJEŠENJA

9. veljače 2012.

BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

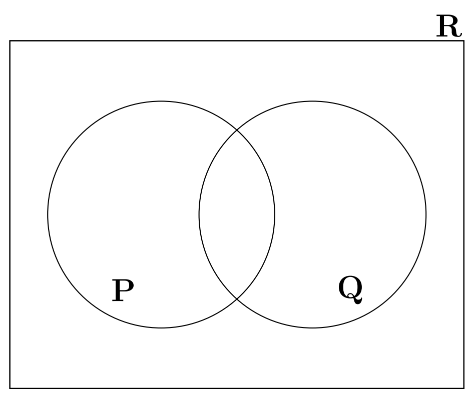
ZADATAK	**BROJ BODOVA**	**MAX BODOVA**
1.	$\times$	12
2.	$\times$	9
3.	$\times$	6
4.	$\times$	21
5.	$\times$	18
6.	$\times$	15
7.	$\times$	12
8.	$\times$	15
9.	$\times$	9
UKUPNO	$\times$	**117**

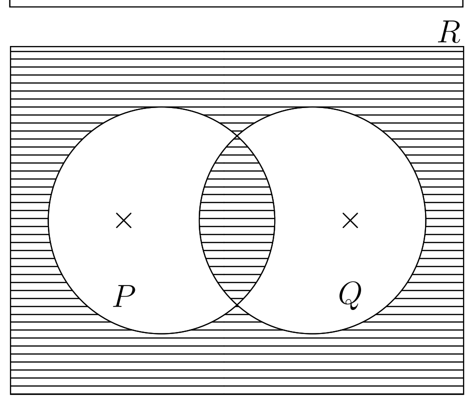
Zadatak 1.

`Ucrtajte u sljedeći Vennov dijagram odnose među navedenim pojmovima.`

`Zadani su pojmovi:`
P `- iracionalan broj (realan broj koji nije prikaziv kao razlomak s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom koji je prirodan).`
Q `- racionalan broj (broj prikaziv kao omjer cijelog i prirodnog broja).`
R `- realan broj.`

Dijagram:





(4×3 boda = 12 bodova)

Zadatak 2.

`Raspisujući istinitosnu tablicu za pogodbu, tj. iskaz` $A \to B$, `uočavamo kako je taj iskaz neistinit u točno jednom retku. Napišite na donje crte sve iskaze koji su neistiniti u točno jednom od preostala tri retka istinosne tablice. Pritom koristite isključivo sljedeće znakove:` A, B, $($, $)$, $\to$, $\neg$. `Znakovi` $\neg$ `i` $\to$ `se ukupno u svakom iskazu smiju pojaviti najviše 2 puta, odnosno svaki znak samo jednom. Svi znakovi ne moraju nužno biti upotrijebljeni.`

a) $A \to \neg B$ (*Alternativno:* $B \to \neg A$)

b) $\neg A \to B$ (*Alternativno:* $\neg B \to A$)

c) $B \to A$

(3×3 boda = 9 bodova)

Zadatak 3.

Operator $\triangle$ djeluje na dva iskaza (zapisujemo kao $A \triangle B$) na način prikazan sljedećom istinitosnom tablicom, gdje 1 predstavlja istinu, a 0 neistinu:

A	B	$A \triangle B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Koristeći isključivo znakove: A, B, C, $\triangle$, (,)
prikažite iskaz P zadan sljedećom istinitosnom tablicom:

A	B	C	P
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Napomena: Rješenje mora biti minimalno (sadržavati što manji broj operatora $\triangle$). Unutar svake zagrade članove napišite abecednim redom.

Rješenje:

a) $\underline{(A\Delta B)\triangle(A\Delta C)}$

b) $\underline{(A\Delta C)\triangle(A\Delta B)}$

(2×3 boda = 6 bodova)

Zadatak 4.

Za skup poveznika kažemo da je ***izražajno potpun*** ako se njime mogu definirati svi ostali poveznici u $\mathcal{L}_i$, odnosno svi poveznici iz skupa $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$. Tako je, na primjer, skup $\{\vee, \neg\}$ izražajno potpun jer $A \wedge B =_{def.} \neg(\neg A \vee \neg B)$, $A \rightarrow B =_{def.} \neg A \vee B$ i (kako smo već definirali '$\rightarrow$') $A \leftrightarrow B =_{def.} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Jesu li sljedeći skupovi poveznika izražajno potpuni? Napišite 'DA' ili 'NE' na crtu uz zadatak.

a) $\{\rightarrow\}$ <u>NE</u>

b) $\{\wedge, \neg\}$ <u>DA</u>

c) $\{\rightarrow, \neg\}$ <u>DA</u>

d) $\{\leftrightarrow, \neg\}$ <u>NE</u>

e) $\{|\}$, pri čemu $A|B =_{def.} \neg A \vee \neg B$ <u>DA</u>

f) $\{\oplus, \neg\}$, pri čemu $A \oplus B =_{def.} \neg(A \leftrightarrow B)$ <u>NE</u>

g) $\{\rightarrow, \nrightarrow\}$, pri čemu $A \nrightarrow B =_{def.} \neg(A \rightarrow B)$ <u>DA</u>

(7×3 boda = 21 bod)

Zadatak 5.

Nadopunite istinitosno stablo iskazima s kvačicom ili bez nje, brojkama, križićima ili kružićima te odgovorite je li zadani iskaz valjan.

$$\boxed{\neg P \to (\neg Q \to \neg P)}$$

$$\begin{array}{lcr}
1 & \neg(\neg P \to (\neg Q \to \neg P))\checkmark & \\
2 & \underline{\neg P} & 1 \\
3 & \neg(\neg Q \to \neg P)\checkmark & 1 \\
4 & \neg Q & \underline{3} \\
5 & \underline{\neg\neg P}\checkmark & 3 \\
6 & P & \underline{5} \\
 & \underline{\times} &
\end{array}$$

Iskaz je valjan.
(Tekstualni se odgovor priznaje ako i samo ako je prvi dio zadatka točno riješen.)

(6×3 boda = 18 bodova)

Zadatak 6.

U ranim fazama nastanka Federacije, bilo je teško održati komunikaciju. Tri planeta koja su sudjelovala u komunikaciji (uzajamnoj, ili jednosmjernoj poput špijuniranja) bila su Andorija, Vulkan i Zemlja. Poteskoće su bile brojne. Tako Andorija i Vulkan nisu imale nikakve odnose, osim što je Vulkan špijunirao Andoriju, koja se držala po strani i nije komunicirala ni sa Zemljom ni s Vulkanom (smatrajući da nitko osim njih ni ne postoji). Jedino je Zemlja održavala uzajamnu komunikaciju s Vulkanom, neznajući za postojanje Andorije. Vulkanci imaju šiljaste uši, Zemljani imaju emocije i zaobljene uši, dok su Andorci plavi, imaju antene i zaobljenje uši. Pretpostavimo da sva bića, osim svojstva koja ih karakteriziraju, nemaju nijedno svojstvo karakteristično za druge vrste. Oznakama '**Z**', '**V**', '**A**', s obzirom na dostupnost informacija na Zemlji, Vulkanu i Andoriji, označite što je istinito na kojem planetu (s tim da neka tvrdnja može biti istinita na više planeta!).

a) Sva inteligentna bića koja poznajemo, imaju zaobljene uši. A

b) Postoji barem jedna inteligentna vrsta osim nas samih. Z, V

c) Ako inteligentno biće nema šiljaste uši, onda je plavo. V, A/ A

d) Postoje inteligentna plava bića. V,A

e) Postoje inteligentna plava bića ili ne postoje. Z, V, A

(5×3 boda = 15 bodova)

Zadatak 7.

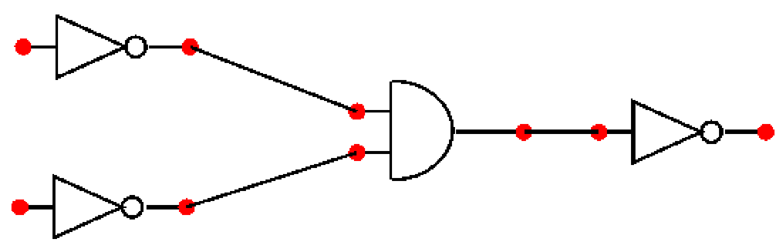
Logika je osnovni instrument rada računala i sva računala te slični uređaji rade po logičkim principima. Logički veznici koje poznajete realizirani su kao fizički sklopovi, a simbolički su predočeni na sljedeći način:

Točke s lijeve strane sklopa predstavljaju ulaz u JEDNOSTAVNI LOGIČKI sklop, a točka s desne strane sklopa predstavlja izlaz. Ulazi i izlazi iz sklopa imaju vrijednosti 1 i 0, odnosno istinu i neistinu. Crte predstavljaju žice koje povezuju više logičkih sklopova. Više povezanih jednostavnih logičkih sklopova čine MODUL.

Definicije sklopova:

- I: $(A \wedge B)$
- ILI: $(A \vee B)$
- NE: $\neg A$
- $X - ILI$: definiran u zadatku broj 8.

Proučite zadani modul te odgovorite, upisujući odgovore na prazne crte, na sljedeća pitanja.



a) Koji je jednostavni logički sklop ekvivalentan gornjem modulu?
<u>ILI/ $\vee$/ disjunkcija</u>

b) Koji je zakon korišten pri rješavanju prethodnog pitanja?
<u>De Morgan</u>

c) Koji je minimalan broj jednostavnih sklopova potreban za implementaciju modula IMPLIKACIJE (pogodbe) i koji su to sklopovi?

(a) Broj sklopova: <u>2</u>.

(b) Sklopovi: <u>NE i ILI/ $\neg$ i $\vee$/ negacija i disjunkcija</u>.

(4×3 boda = 12 bodova)

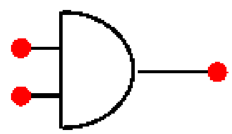
Zadatak 8.

Na prazne crte upišite pripadajuće odgovore.

a) Reducirajte na najkraći mogući iskaz, odnosno koristeći najmanji mogući broj veznika, sljedeći iskaz. Potom taj reducirani iskaz nacrtajte minimalnim brojem logičkih sklopova.

Zadani iskaz jest: $A \wedge (\neg A \vee (A \wedge B))$

Gornji iskaz ekvivalentan je iskazu: $\underline{A \wedge B}$, a slika je:



b) Logički operator $X\!-\!ILI$ definiran je sljedećom istinitosnom tablicom, gdje 1 predstavlja istinu, a 0 neistinu:

A	B	$X-ILI$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Kada biste minimalnom upotrebom samo sljedećih logičkih veznika: $\neg$, $\wedge$ i $\vee$, napisali iskaz s $X-ILI$ operatorom za iskaze A i B,

(a) koliki broj gore zadanih logičkih veznika bi bio potreban za realizaciju? $\underline{4}$.

(b) Te koliko puta biste upotrijebili negaciju? $\underline{1}$.

(c) Kada biste negirali izlaz $X-ILI$ sklopa, dobili biste logički veznik: <u>ekvivalenciju/ dvopogodbu</u>.

(5×3 boda = 15 bodova)

Zadatak 9.

Provjerite metodom ***reductio ad absurdum*** je li sljedeći zaključak valjan.

> *Samo ako Oskar i Helena neće ići na izlet, neće biti lijepo vrijeme. Ne stoji da će biti lijepo vrijeme ako i samo ako će biti vruće. Oskar i Helena će ići na izlet, a kiša neće padati. Padat će kiša ili će biti lijepo vrijeme. Dakle, neće biti vruće.*

KLJUČ TUMAČENJA:

$A =$ Oskar i Helena će ići na izlet.
$B =$ Bit će lijepo vrijeme.
$C =$ Padat će kiša.
$D =$ Bit će vruće.

$\neg$	B	$\rightarrow$	$\neg$	A	$\neg$	(	B	$\leftrightarrow$	D	)	A	$\wedge$	$\neg$	C	C	$\vee$	B	$\neg$	D
N	I	I	N	I	I		I	$\frac{N}{I}$	I		I	I	I	N	N	I	I	N	I

Zaključak <u>jest</u> valjan.

(Tekstualni se odgovor priznaje ako i samo ako je prvi dio zadatka točno riješen.)

(3×3 boda = 9 bodova)