ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ LOGIKE

12. ožujka 2013.

BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

ZADATAK	**BROJ BODOVA**	**MAX BODOVA**
1.		36
2.		30
3.		27
4.		21
5.		12
6.		33
7.		18
8.		72
UKUPNO		**249**

Zadatak 1.

Hvalospjev ljubavi
(1 Kor 13, 1-13)

Kad bih sve jezike ljudske govorio i anđeoske,
a ljubavi ne bih imao,
bio bih mjed što ječi
ili cimbal što zveči.

Kad bih imao dar prorokovanja
i znao sva otajstva
i sve spoznanje;
i kad bih imao svu vjeru
da bih i gòre premještao,
a ljubavi ne bih imao - ništa sam!

I kad bih razdao sav svoj imutak
i kad bih predao tijelo svoje da se sažeže,
a ljubavi ne bih imao -
ništa mi ne bi koristilo.

Napomena: Dio teksta "kad bih imao svu vjeru da bih i gòre premještao" treba promatrati kao sastavljen od dva jednostavna (atomarna) iskaza.

Pretpostavimo pod a), b) i c) redom istinitost prvoga, drugoga pa trećega istaknutog iskaza (svaki promatramo odvojeno) te istinitost gornjega teksta. Koji iskazi od ponuđenih slijede? Zaokružite točne odgovore:

a) Istina je da nisam ni mjed što ječi ni cimbal što zveči.
1. Govorim ljudske i anđeoske jezike, ali imam ljubavi. DA NE
2. Ne govorim anđeoske jezike, a nemam ni ljubavi. DA NE
3. Nije tako da nije slučaj da sam mjed što ječi. DA NE
4. Nemam ljubavi i nisam cimbal što zveči. DA NE

b) Istina je da imam svu vjeru. Istina je i da nemam ljubavi.
1. Mogu premještati gòre. DA NE
2. Nije tako da sam ništa. DA NE
3. Imam svu vjeru, ali ne znam otajstva. DA NE
4. Samo ako nemam ljubavi, ništa sam. DA NE

c) Istina je da nisam razdao sav svoj imutak, ali imam ljubavi.
1. Nisam razdao sav svoj imutak. DA NE
2. Nisam razdao sav svoj imutak, ali mi nešto koristi. DA NE
3. (Nije tako da mi ništa ne koristi) samo ako nemam ljubavi. DA NE
4. Ako nisam razdao sav svoj imutak, ali imam ljubavi, ništa mi ne koristi. DA NE

(12×3 boda = 36 bodova)

Zadatak 2.

Simbolom $\models$ označavamo logički slijed. On nije simbol jezika iskazne logike, nego predstavlja odnos među iskazima. Za logički slijed vrijedi da uvijek kada su istinite premise, mora biti istinita i konkluzija. Preciznije rečeno, sve interpretacije koje čine istinitim sve premise, čine istinitom i konkluziju. Na primjer, to da iz skupa iskaza $\{A \to B, \neg B\}$ logički slijedi iskaz '$\neg A$' možemo kraće zapisati:

$$\{A \to B, \neg B\} \models \neg A$$

Pri ispitivanju valjanosti logičkoga slijeda u iskaznoj logici u svim mogućim interpretacijama treba provjeriti vrijedi li tvrdnja da je konkluzija istinita ako su istinite premise.

a) U sljedećim primjerima razvrstajte valjane zaključke od nevaljanih i zaokružite točne odgovore:

1. $\{[(A \wedge B) \wedge \neg C] \to \neg D, \neg D\} \models [(A \wedge B) \wedge \neg C]$ `DA NE`
2. $\{D, [(A \wedge B) \wedge \neg C] \to \neg D\} \models [(A \wedge B) \wedge \neg C]$ `DA NE`
3. $\{[(A \wedge B) \wedge \neg C] \to \neg D, D\} \models \neg[(A \wedge B) \wedge \neg C]$ `DA NE`
4. $\{\neg[(A \wedge B) \wedge \neg C], [(A \wedge B) \wedge \neg C] \to \neg D\} \models D$ `DA NE`
5. $\{[(A \wedge B) \wedge \neg C] \to \neg D, [(A \wedge B) \wedge \neg C]\} \models \neg D$ `DA NE`
6. $\{\neg[(A \wedge B) \wedge \neg C] \to \neg D, \neg[(A \wedge B) \wedge \neg C]\} \models D$ `DA NE`

b) Navedite brojeve redaka iz zadatka **a)** u kojima se javljaju sljedeći valjani ili nevaljani oblici zaključivanja:

1. modus ponens _____ 2. modus tollens _____
3. nijek prednjaka _____ 4. potvrda posljetka _____

(10×3 boda = 30 bodova)

Zadatak 3.

Istinitosne veznike možemo shvatiti kao funkcije koje u ovisnosti o vrijednostima iskaznih slova računaju istinitosnu vrijednost suda. Na primjer, veznik $\wedge$ može se interpretirati kao funkcija $f_\wedge$, takva da $f_\wedge(i,i) = i$, $f_\wedge(i,n) = n$, $f_\wedge(n,i) = n$ i $f_\wedge(n,n) = n$.

a) Neka binarna (dvomjesna) istinitosna funkcija f ima sljedeće svojstvo: $f(x,y) = f(x, f_\wedge(x,y))$. Na primjer, za formulu $p \vee q$, $f(p,q) = p \vee q$, a $f(p,(p \wedge q)) = p \vee (p \wedge q)$.
Za koje od sljedećih formula vrijedi svojstvo funkcije f? Upišite 'DA' ako za formulu vrijedi zadano svojstvo, a inače upišite 'NE'.

1. $q \to p$ _____ 2. $p \wedge p$ _____ 3. $p \wedge \neg q$ _____ 4. $p \to q$ _____

5. $p \vee q$ _____ 6. $\neg p \vee \neg q$ _____ 7. $p \vee \neg p$ _____ 8. $p \leftrightarrow \neg q$_____

b) Napišite sve formule iz zadatka **a)** za koje vrijedi svojstvo funkcije g: $g(x,y) = g(x,x)$.

Odgovor: ____

(9×3 boda = 27 bodova)

Zadatak 4.

U dvovrijednosnoj logici, koja za istinitosne vrijednosti uzima istinu (i) i neistinu (n), za jedan iskaz A postoje četiri različite istinitosne funkcije:

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$A \wedge \neg A$
i	n	i	n
n	i	i	n

a) Koliko različitih istinitosnih funkcija postoji za dva različita iskaza, A i B?

Odgovor: ________

b) Koliko različitih istinitosnih funkcija postoji za n različitih iskaza?

Odgovor: ________

c) Korištenjem samo iskaznih slova p i q te implikacije može se konstruirati ukupno 6 logički neekvivalentnih formula, a svakom bi se daljnjom primjenom veznika '→' dobilo neku od već dobivenih istinitosnih tablica. Jedna je od tih formula $p \to p$. Napišite ostalih 5 formula tako da rješenja budu minimalna, tj. da se u svakome rješenju pojavljuje najmanji mogući broj 'p', 'q' i '→' (ne moraju nužno svi simboli biti upotrijebljeni u svakome rješenju).

Rješenja:

1.__________________ **2.**__________________ **3.**__________________

4.__________________ **5.**__________________

(7×3 boda = 21 bod)

Zadatak 5.

Vokabular jezika L iskazne logike čine iskazna slova (p, q, r, ...), vanjske zagrade i veznici ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$). U sintaksi jezika L definiramo *pravilno sastavljeni iskaz*, tj. sve ono što može biti formula jezika L, na sljedeći način:

1. Iskazna su slova (p, q, r, ...) formule jezika L.
2. Ako je ϕ formula jezika L, onda je i $\neg\phi$ formula jezika L.
3. Ako su ϕ i ψ formule jezika L, onda su i $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ i $(\phi \leftrightarrow \psi)$ formule jezika L.
4. Samo formule koje mogu biti dobivene na temelju uvjeta 1. - 3. u konačnome broju koraka jesu formule jezika L.

U prethodnoj je definiciji rečeno da objekti imaju neko svojstvo, u ovome slučaju svojstvo 'biti formula jezika L' ako mogu biti konstruirani iz drugih, jednostavnijih objekata koji imaju to svojstvo. Takve se definicije nazivaju *induktivnim* ili *rekurzivnim* definicijama. Budući da je samo svojstvo 'biti formula jezika L' dano induktivnom metodom, možemo induktivno definirati različita svojstva formula. Na primjer, neka z(ϕ) označava broj zagrada u formuli ϕ. Tada je:

1. z(p)=0
2. z($\neg\phi$)=z(ϕ)
3. z(($\phi \star \psi$))=z(ϕ)+z(ψ)+2, gdje je $\star$ bilo koji binarni (dvomjesni) veznik.

a) Neka je s(ϕ) broj pojavljivanja iskaznih slova u formuli ϕ. Dovršite induktivnu definiciju, ako je zadan prvi korak:

1. s(p)=1
2. s($\neg\phi$)=________________
3. s(($\phi \star \psi$))=________________, gdje je $\star$ bilo koji binarni (dvomjesni) veznik.

b) Neka je v(ϕ) broj pojavljivanja **binarnih (dvomjesnih) veznika** u formuli ϕ. Dovršite induktivnu definiciju, ako je zadan prvi korak:

1. v(p)=0
2. v($\neg\phi$)=________________
3. v(($\phi \star \psi$))=________________, gdje je $\star$ bilo koji binarni (dvomjesni) veznik.

(4×3 boda = 12 bodova)

Zadatak 6.

Koristeći se samo osnovnim pravilima, dopunite sljedeći dokaz iskazima i, desno, potpunim opravdanjima! U opravdanjima upotrijebite ‘pretp.’ za ‘pretpostavka’, ‘u’ za ‘uvođenje’, ‘i’ za ‘isključenje’, i veznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (npr. ‘$\wedge$u’ za ‘uvođenje konjunkcije’)!

1	$((A \rightarrow (B \wedge D)) \wedge (C \wedge D))$	pretp.
2	$(((B \wedge D) \rightarrow (C \wedge D)) \rightarrow A)$	pretp.
3		__________
4	$B \wedge D$	pretp.
5	$C \wedge D$	$\wedge$i, 1
6		__________
7	A	$\rightarrow$i, 2,6
8	A	pretp.
9		__________
10		__________
11	$B \wedge D$	$\rightarrow$i, 9,10
12	$(A \rightarrow (B \wedge D))$	$\rightarrow$u, 9-11
13		__________
14	$((B \wedge D) \leftrightarrow A)$	__________

(11×3 boda = 33 boda)

Zadatak 7.

Aksiomi su se tradicionalno shvaćali kao istine same po sebi, a u modernome smislu oni su osnovni iskazi u nekoj teoriji, a njihovu istinitost prihvaćamo bez dokaza. Aksiomatska se metoda može upotrijebiti i u iskaznoj logici. Nakon što je dana definicija pravilno sastavljenoga iskaza (poput one u **Zadatku 5.**), može se izabrati skup logički istinitih iskaza koji će biti aksiomi. Na primjer, u Frege-Łukasiewiczevome aksiomatskom sustavu, aksiomi su sljedeći:

A1 : $p \to (q \to p)$
A2 : $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
A3 : $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$
gdje su p, q i r proizvoljni iskazi.

Na temelju aksioma i primjenom pravila zaključivanja *modus ponens* mogu se valjanim zaključivanjem dokazati svi valjani iskazi iskazne logike, koji se nazivaju *teoremima*. Nakon što su neki teoremi već dokazani, koristimo ih u dokazima drugih teorema, ne dajući svaki put iznova njihov dokaz (iako nas ništa ne sprječava da to činimo).
Sljedeće su formule teoremi u Frege-Łukasiewiczevome sustavu:

T1 : $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
T2 : $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
T3 : $p \to ((p \to q) \to q)$
gdje su p, q i r proizvoljni iskazi, primjerice za $p \equiv C \wedge D$ i $q \equiv C \vee D$, **T2** poprima oblik:

$$((C \wedge D) \to (C \vee D)) \to (\neg(C \vee D) \to \neg(C \wedge D))$$

Koristeći se samo pravilom isključenja implikacije (*modus ponens*) i varijantama teorema **T1-T3** dopunite sljedeći dokaz iskazima koji nedostaju s lijeve strane i potpunim opravdanjima s desne strane.

Svaki korak u dokazu mora biti varijanta jednoga od triju navedenih teorema (**ne aksioma!**) ili dobiven iz prethodnih koraka pravilom *modus ponens*. Upotrijebite 'pretp. Tn' za označavanje pretpostavke sheme gornjega teorema iz koje je dobivena.

1	$(((p \to q) \to q) \to (\neg q \to \neg(p \to q))) \to$ ______________________	pretp. T1
2	$((p \to q) \to q) \to (\neg q \to \neg(p \to q))$	__________
3	______________________	1,2
4	______________________	__________
5	$(p \to (\neg q \to \neg(p \to q)))$	__________

(6×3 boda = 18 bodova)

Zadatak 8.

Zadani su sljedeći iskazi: $(P \land Q) \to R$ i $(P \to R) \land (Q \to R)$. Nadopunite istinitosna stabla pod **a)** i **b)** (iskazima s kvačicom ili bez nje, brojkama, križićima ili kružićima) te odgovorite jesu li ta dva iskaza ekvivalentna.

a)

1. $(P \land Q) \to R \checkmark$
2. ______
3. ______ ______ ______
4. $\neg(P \to R)\checkmark$ $\neg(Q \to R)\checkmark$ $\neg(P \to R)\checkmark$ $\neg(Q \to R)\checkmark$ 2
5. P Q P Q 4
6. ______ ______ ______ ______ 4

$\times$ $\times$

7. $\neg P$ $\neg Q$ $\neg P$ $\neg Q$ 3

______ ______ ______ ______

b)

1. ______
2. $\overline{[(P \to R) \land (Q \to R)]}\checkmark$
3. ______ ______
4. $\neg R$ 1
5. $P \to R\checkmark$ ______
6. ______ 2
7. P ______
8. Q 3
9. ______ R ______

______ ______

c) Zaokružite točan odgovor:

Na temelju istinitosnih stabala zaključujemo da iskazi `jesu / nisu` ekvivalentni.

Napomena: Odgovor se priznaje ako i samo ako su oba stabla točno riješena.

d) Da bismo provjerili jesu li navedena dva iskaza međusobno ekvivalentna, izgradili smo dva različita istinitosna stabla. Koja su nam dva logička veznika potrebna da bismo bilo koje dvije formule povezali u jedinstvenu formulu te izgradnjom samo jednoga istinitosnog stabla provjerili jesu li te formule ekvivalentne?

Odgovor:______

(24×3 boda = 72 boda)