ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ LOGIKE

12. ožujka 2014.

BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE:
  - SVI ZADACI: **3 BODA**
- IZOSTANAK RJEŠENJA:
  - SVI ZADACI: **1 BOD**
- POGREŠNO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: **0 BODOVA**

NAPOMENA:

Pažljivo pročitajte zadatke i provjerite po broju bodova da niste nešto zaboravili. Sretno!

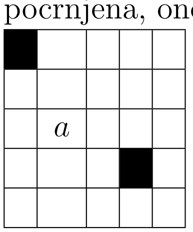
ZADATAK	**BROJ BODOVA**	**MAX BODOVA**
1.		27
2.		15
3.		57
4.		21
5.		42
6.		48
7.		18
8.		36
UKUPNO		**264**

Zadatak 1. (bodovi: $9 \times 3 = 27$)

Zamislimo da je beskonačna ravnina podijeljena u kvadratne ćelije. Pritom je jedna konkretna ćelija označena s a. Neke ili sve ćelije mogu biti označene. U predmetnom su području svi prirodni brojevi zajedno s nulom, te sve ćelije ravnine. Dostupne relacije:

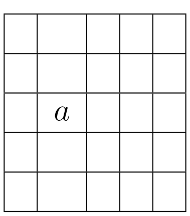
- $x \nearrow^n y$ ... iz ćelije x moguće je u n (broja) pomaka stići do ćelije y, a svaki pomak je za jednu ćeliju gore-desno
- $x \downarrow^n y$ ... iz ćelije x moguće je u n (broja) pomaka stići do ćelije y, a svaki pomak je za jednu ćeliju dolje
- Tx ... x je označena ćelija

Napomena: za svaku ćeliju x vrijedi $x \nearrow^0 x$ i $x \downarrow^0 x$.
Na slici je primjer konačnog isječka dane beskonačne ravnine. Ćelija a je ona u kojoj je upisano a. Pocrnjene ćelije su one koje su označene (ako je x pocrnjena, onda Tx).



Podzadatak 1.a:
Za svaku od navedenih formula označite (pocrnite) one i samo one ćelije iz isječka koje moraju biti označene da bi te formule bile istinite.

1. $\forall x(\exists n(x \nearrow^n a \lor a \nearrow^n x) \to Tx)$



2. $\forall x(\exists n(a \downarrow^n x \land a \nearrow^n x) \to Tx)$

	a			

3. $Ta \wedge \forall x \forall y (Tx \rightarrow (x \downarrow^2 y \rightarrow Ty))$

				a

Podzadatak 1.b: Recimo da uz navedene relacije želimo koristiti i relaciju $x \rightarrow^n y$, koja bi bila istinita upravo onda kada iz ćelije x možemo u n (broja) pomaka stići do ćelije y, a svaki pomak je za jednu ćeliju desno. Podcrtajte točan odgovor:

- Postoje formule koje koriste $x \rightarrow^n y$, a za koje ne postoji ekvivalentna formula koja koristi samo $x \downarrow^n y$ i $x \nearrow^n y$.

- Sve formule koje koriste $x \rightarrow^n y$ imaju ekvivalentnu formula koja koristi samo $x \downarrow^n y$ i $x \nearrow^n y$.

Zadatak 2. (bodovi: $5 \times 3 = 15$)

Definiramo sustav $\mathcal{S}^*$ koji je po svemu nalik klasičnoj logici, osim što zadano predmetno područje (domena) ima samo dva predmeta (konstante), odnosno $\mathbb{D} = \{0, 1\}$. Također, ima samo jedan jednomjesni relacijski simbol, prirok, $B(x)$ u značenju "x je broj".
Napisite *bez koristenja količitelja* iskaz koji je istovrijedan (ekvivalentan) iskazu:

1. Svi predmeti su brojevi: _______________
2. Barem jedan predmet je broj: _______________
3. Ili je jedan predmet broj, ili je drugi predmet broj, ali ne oboje: _______________
4. Niti jedan predmet nije broj: _______________
5. Nisu svi predmeti brojevi: _______________

Zadatak 3. (bodovi: $19 \times 3 = 57$)

U logici, informatici i lingvistici se koriste takozvane kontekstno slobodne gramatike. Ove se gramatike koriste za izgradnju rečenica iz zadanih riječi pomoću točno specificiranih tvorbenih pravila. Neka je skup takvih pravila zadan listom pravila, odnosno gramatikom, **L**:

1. `Rečenica` ⇝ `Subjekt Predikat Objekt`
2. `Subjekt` ⇝ `Imenica`
3. `Objekt` ⇝ `ImeničnaFraza`
4. `ImeničnaFraza` ⇝ *DOBAR* `Imenica`
5. `ImeničnaFraza` ⇝ `Imenica`
6. `Imenica` ⇝ *FIDO*
7. `Imenica` ⇝ *PAS*
8. `Predikat` ⇝ *JE*

Primjer rečenice generirane gornjom listom pravila **L** je rečenica:
FIDO JE DOBAR PAS

Podzadatak 3.a: Napišite sve rečenice koje je moguće generirati listom pravila **L**:

1. *FIDO JE DOBAR PAS*
2. _______________
3. _______________
4. _______________
5. _______________
6. _______________
7. _______________

8. _______________

Podzadatak 3.b: Napiši sve rečenice koje je moguće generirati ako listu **L** izmjenimo tako da umjesto (5) stavimo (5'): `ImeničnaFraza`$\rightsquigarrow$ `Objekt`.

1. _______________
2. _______________
3. _______________
4. _______________

Podzadatak 3.c: Napiši sve rečenice koje je moguće generirati ako listu **L** izmjenimo tako da se izbaci (5):

1. _______________
2. _______________
3. _______________
4. _______________

Podzadatak 3.d: Izbacivanjem jednog ili više pravila, gramatika **L** više neće moći generirati rečenice. Napiši koja se *pojedinačna* pravila treba izbaciti da lista **L** više ne može generirati nijednu rečenicu:

1. Pravilo _____
2. Pravilo _____
3. Pravilo _____
4. Pravilo _____

Zadatak 4. (bodovi: $7 \times 3 = 21$)

Zadani su skupovi iskaza. Napišite uz njih jesu li valjani, zadovoljivi ili nezadovoljivi.

1. $\Gamma = \{P \wedge Q, \neg Q \wedge R\}$ ______________
2. $\Gamma = \{P \wedge \neg P, \neg P \vee P\}$ ______________
3. $\Gamma = \{(P \to P) \to P, P \to (P \to P)\}$ ______________
4. $\Gamma = \{((P \to P) \to P) \to P, P \to (P \to (P \to P))\}$ ______________
5. $\Gamma = \{((P \to Q) \to P) \to P, (P \to P) \to P\}$ ______________
6. $\Gamma = \{(P \wedge \neg P) \to R, R \to (P \vee \neg P)\}$ ______________
7. $\Gamma = \{P \to \neg P, \neg P \to P\}$ ______________

Zadatak 5. (bodovi: $14 \times 3 = 42$)

Koristeći samo osnovna pravila za naravnu dedukciju iskazne logike, dokažite naravnom dedukcijom sljedeći iskaz (pri čemu ne zaboravite popuniti opravdanja): $(\forall x Px \to \exists y \forall x Qxy) \to (\neg \exists y \forall x Qxy \to \neg \forall x Px)$

1		. . . / . . .
2		. . . / . . .
3		. . . / . . .
4		. . . / . . .
5		2/ op.
6		. . . / . . .
7		. . . / . . .
8	$(\forall x Px \to \exists y \forall x Qxy) \to (\neg \exists y \forall x Qxy \to \neg \forall x Px)$	. . . / . . .

Zadatak 6. (bodovi: $16 \times 3 = 48$)

Koristeći samo osnovna pravila za naravnu dedukciju iskazne logike, dokažite naravnom dedukcijom sljedeći iskaz (pri čemu ne zaboravite popuniti opravdanja): $((P \to P) \to P) \to P$

1		. . . / . . .
2		. . . / . . .
3		. . . / . . .
4		. . . / . . .
5		. . . / . . .
6		. . . / . . .
7		2/ op.
8		. . . / . . .
9	$((P \to P) \to P) \to P$	. . . / . . .

Zadatak 7. (bodovi: $6 \times 3 = 18$)

Logičke operatore možemo definirati preko njihovih istinitosnih tablica. Kad operator ima jednu ulaznu istinitosnu vrijednost zovemo ga unarnim (npr. negacija). Kad operator ima dvije ulazne istinitosne vrijednosti zovemo ga binarnim (npr. uobičajena konjunkcija). Kad operator ima tri ulazne istinitosne vrijednosti zovemo ga ternarnim (npr. ternarna konjunkcija koja je istinita ako i samo ako su sva tri podiskaza istinita). Za n ulaznih vrijednosti, zovemo ga n-arnim. Kažemo da pomoću jednog (skupa) operatora možemo zapisati drugi operator ako za bilo koju formulu koja sadrži drugi operator, možemo pronaći ekvivalentnu formulu koja ne sadrži drugi operator ali sadrži prvi operator (odnosno operatore iz prvog skupa). Npr. pomoću skupa koji sadrži $\vee$ i $\neg$ možemo zapisati $\rightarrow$.
Odgovorite s DA/NE:

1. Za bilo koji operator (n-arni operator za bilo koji n), moguće je koristeći samo standardne binarne operatore i negaciju zapisati formulu čija istinitosna tablica ima jednake vrijednosti kao i tablica tog operatora._______________

2. S bilo kojim ternarnim operatorom moguće je zapisati bilo koji binarni operator. _______________

3. S bilo kojim ternarnim operatorom moguće je zapisati bilo koji operator (ne samo bilo koji binarni)._______________

4. S nekim je ternarnim operatorom moguće zapisati bilo koji binarni operator._______________

5. S nekim je ternarnim operatorom moguće zapisati bilo koji operator (ne samo bilo koji binarni)._______________

6. Za svaki n, postoji n-arni operator pomoću kojeg je moguće zapisati bilo koji operator._______________

Zadatak 8. (bodovi: $12 \times 3 = 36$)

U predmetnom području su predmeti a, b, c i d.

- Vx ... x je velik
- Zx ... x je zelen

Podzadatak 8.a:
Vjerojatnost formule je omjer broja situacija u kojima je formula istinita i svih mogućih situacija. Za svaki predmet pretpostavljamo da je jednaka vjerojatnost da je velik i da nije velik, te da je zelen i nije zelen. Izrazite u postocima vjerojatnost (zaokružite na bez decimala, a priznaje se i postotak više ili manje) navedenih formula:

1. Va ______________
2. $\forall x Zx$ ______________
3. $\forall x Zx \land \exists x Vx$ ______________
4. $\forall x (Zx \leftrightarrow Vx)$ ______________
5. $Zd \to (\exists x Zx \leftrightarrow (\exists x Vx \leftrightarrow \neg\forall x \neg Vx))$ ______________

Podzadatak 8.b: Odgovorite s DA/NE:

1. Ako dvije formule imaju jednaku vjerojatnost, to su iste formule. ______________
2. Ako dvije formule imaju jednaku vjerojatnost, to su logički ekvivalentne formule. ______________
3. Ako su dvije formule logički ekvivalentne, tada im je jednaka vjerojatnost. ______________
4. Ako znamo da su F i $F \to G$ istinite, tada je vjerojatnije da G nego da $\neg G$. ______________
5. Ako znamo da su F i $F \to G$ istinite, tada je jednako vjerojatno ili vjerojatnije da G nego da $\neg G$. ______________

6. Ako znamo da su G i $F \to G$ istinite, tada je vjerojatnije da F nego da $\neg F$. ______________

7. Ako znamo da su G i $F \to G$ istinite, tada je jednako vjerojatno ili vjerojatnije da F nego da $\neg F$. ______________