# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ LOGIKE
# RJEŠENJA

3. ožujka 2011.

**BODOVI**:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE:
  - ZADACI 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10: **3 BODA**
  - ZADATAK 8: **2 BODA**
- IZOSTANAK RJEŠENJA:
  - SVI ZADACI: **1 BOD**
- POGREŠNO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: **0 BODOVA**

| **ZADATAK** | **BROJ BODOVA** | **MAX BODOVA** |
|---|---|---|
| 1. | $\times$ | 39 |
| 2. | $\times$ | 30 |
| 3. | $\times$ | 45 |
| 4. | $\times$ | 27 |
| 5. | $\times$ | 12 |
| 6. | $\times$ | 42 |
| 7. | $\times$ | 15 |
| 8. | $\times$ | 48 |
| 9. | $\times$ | 27 |
| 10. | $\times$ | 9 |
| **UKUPNO** | | **294** |

**Zadatak 1. (bodovi:** $13 \times 3 = 39$)

Koristeći se samo osnovnim pravilima, dopunite sljedeći dokaz iskazima i, desno, potpunim opravdanjima! U opravdanjima upotrijebite ‘pretp.’ za ‘pretpostavka’, ‘u’ za ‘uvodenje’, ‘i’ za ‘isključenje’, ‘op’ za ‘opetovanje’ i poveznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (npr. ‘u$\wedge$’ za ‘uvodenje konjunkcije’)!

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg(A \vee \neg A)$ | pretp. |
| 2 | $A$ | pretp. |
| 3 | $A \vee \neg A$ | 2/ u$\vee$ |
| 4 | $\neg(A \vee \neg A)$ | 1/ op. |
| 5 | $\neg A$ | 2–4/ u$\neg$ |
| 6 | $A \vee \neg A$ | 5/ u$\vee$ |
| 7 | $\neg(A \vee \neg A)$ | 1/ op. |
| 8 | $A \vee \neg A$ | 1–7/ i$\neg$ |

Alternativa:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg(A \vee \neg A)$ | pretp. |
| 2 | $\neg A$ | pretp. |
| 3 | $A \vee \neg A$ | 2/ u$\vee$ |
| 4 | $\neg(A \vee \neg A)$ | 1/ op. |
| 5 | $A$ | 2–4/ i$\neg$ |
| 6 | $A \vee \neg A$ | 5/ u$\vee$ |
| 7 | $\neg(A \vee \neg A)$ | 1/ op. |
| 8 | $A \vee \neg A$ | 1–7/ i$\neg$ |

**Zadatak 2.** **(bodovi:** $10 \times 3 = 30$)

Odgovorite s DA ili NE na sljedeća pitanja:

1. Pojmovi ‘otac’ i ‘majka’ međusobno su ukršteni? <u>NE</u>
2. Pojmovi ‘sestra’ i ‘strina’ međusobno su ukršteni? <u>DA</u>
3. Pojmovi ‘satnik’ i ‘general’ međusobno su ukršteni? <u>NE</u>
4. Pojmovi ‘satnik’ i ‘general’ međusobno su razdvojeni? <u>DA</u>
5. Pojam ‘metal’ nadređen pojmu ‘legura’? <u>DA</u>
6. Pojmovi ‘infracrven’ i ‘ultraljubicast’ međusobno su kontradiktorni? <u>NE</u>
7. Pojam ‘zlato’ nadređen pojmu ‘metal’? <u>NE</u>
8. Pojmovi ‘bos’ i ‘obuven’ međusobno lišidbeni? <u>DA</u>
9. Pojmovi ‘bijel’ i ‘crn’ međusobno suprotni? <u>DA</u>
10. Pojam ‘led’ podređen pojmu ‘$H_2O$’? <u>DA</u>

**Zadatak 3. (bodovi:** $15 \times 3 = 45$)

Nadopunite istinitosno stablo (iskazima s kvačicom ili bez nje, brojkama, križićima ili kružićima) i sljedeći iskaz, te odgovorite je li taj iskaz valjan.

$$\boxed{(R \to \neg S) \leftrightarrow (S \to \neg R)}$$

**Priznaje se samo cijeli redak u stablu, zajedno s opravdanjem.**

$$\begin{array}{r c c c c}
1 & \multicolumn{3}{l}{\neg[(R \to \neg S) \leftrightarrow (S \to \neg R)]\checkmark} & \\
 & \multicolumn{3}{c}{/\backslash} & \\
2 & \multicolumn{2}{c}{R \to \neg S\checkmark} & \neg(R \to \neg S)\checkmark & 1 \\
3 & \multicolumn{2}{c}{\neg(S \to \neg R)\checkmark} & S \to \neg R\checkmark & 1 \\
4 & \multicolumn{2}{c}{S} & | & 3 \\
5 & \multicolumn{2}{c}{\neg\neg R\checkmark} & | & 3 \\
6 & \multicolumn{2}{c}{R} & | & 5 \\
 & / & \backslash & | & \\
7 & \neg R & \neg S & | & 2 \\
 & \times & \times & | & \\
8 & & & R & 2 \\
9 & & & \neg\neg S\checkmark & 2 \\
10 & & & S & 2 \\
 & & & / \quad \backslash & \\
11 & & & \neg S \quad \neg R & 3 \\
 & & & \times \quad \times &
\end{array}$$

Iskaz je valjan.
(Tekstualni se odgovor priznaje ako i samo ako je prvi dio zadatka točno riješen.)

**Zadatak 4. (bodovi:** $9 \times 3 = 27$)

Zadan je sljedeći iskaz:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

Dopunite na prazne crte donje iskaze na najkraći mogući način tako da dobijete iskaze koji su ekvivalenti zadanoga iskaza! Pripazite da konjunkcija i disjunkcija uvijek budu dvočlane!

1. $\neg P \vee (Q \rightarrow R)$
2. $\neg P \vee (\neg Q \vee R)$
3. $P \rightarrow (\neg Q \vee R)$
4. $\neg P \vee \neg(Q \wedge \neg R)$
5. $\neg(P \wedge (Q \wedge \neg R))$
6. $(\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee R)$
7. $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee R)$
8. $\neg(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge \neg R)$
9. $\neg((P \wedge Q) \wedge (P \wedge \neg R))$

**Zadatak 5. (bodovi:** $4 \times 3 = 12$)

Neka je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ skup prirodnih brojeva. Za svaki $m \in \mathbb{N}$ (svaki $m$ koji je član $\mathbb{N}$) vrijedi da je oblika $2n$ (nazivamo ga parnim brojem) ili $2n+1$ (nazivamo ga neparnim brojem), pri čemu $n \in \mathbb{N}$. Ako uzmemo proizvoljan $k \in \mathbb{N}$, onda broj $k$ ne može biti oblika $2n$ i u isto vrijeme oblika $2n+1$ za neki fiksni faktor $n$, znači da $k$ ili nije paran (oblika $2n$), ili nije neparan (oblika $2n+1$). Slijedi da $k$ nije prirodan broj.

a) Zaokruži sve što vrijedi za zadani zaključak:

- Dobro je primjenjen *modus ponens.*
- Zaključak je neodlučljiv.
- Dobro je primjenjen *modus tollens.*
- <u>Zaključak nije valjan.</u>
- Zaključak je valjan.
- Ništa od navedenog.

b) Zadani zaključak ima (zaokruži točan odgovor):

- <u>Dvije neistovrijedne premise</u>
- Tri neistovrijedne premise
- Četri neistovrijedne premise
- Pet neistovrijedne premisa

c) Promijenimo dio zaključka:

(...), znači da $k$ *nije paran (oblika* $2n$*), ni neparan (oblika* $2n+1$*).* Slijed da (zaokruži točan odgovor):

- ne slijedi ništa.
- $k$ je prirodan broj.
- $k$ nije član skupa $\mathbb{N}$
- $k$ je paran i neparan

d) Koji je od sljedećih sudova sadržan u izvornom tekstu, gdje '$m \in \mathbb{N}$' znači '$m$ je član skupa $\mathbb{N}$', '$m \notin \mathbb{N}$' znači '$m$ nije član skupa $\mathbb{N}$', a '$Pm$' znači '$m$ je paran broj' (zaokruži točan odgovor)?

- $m \in \mathbb{N} \wedge \neg(Pm \rightarrow Pm)$
- $m \notin \mathbb{N} \wedge \neg\neg(Pm \rightarrow Pm)$
- $m \notin \mathbb{N} \vee \neg\neg(Pm \rightarrow Pm)$
- $m \in \mathbb{N} \wedge \neg(Pm \vee Pm)$

**Zadatak 6. (bodovi:** $14 \times 3 = 42$)

Koristeći se samo osnovnim pravilima, dopunite sljedeći dokaz iskazima i, desno, potpunim opravdanjima! U opravdanjima upotrijebite ‘pretp.’ za ‘pretpostavka’, ‘u’ za ‘uvodenje’, ‘i’ za ‘isključenje’, ‘op’ za ‘opetovanje’ i poveznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ (npr. ‘u$\wedge$’ za ‘uvodenje konjunkcije’)!

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\vert\ \neg P \vee Q$ | pretp. |
| 2 | $\vert\ \vert\ P$ | pretp. |
| 3 | $\vert\ \vert\ \vert\ \neg P$ | pretp. |
| 4 | $\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \neg Q$ | pretp. |
| 5 | $\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ P$ | 2. / op. |
| 6 | $\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \neg P$ | 3. / op. |
| 7 | $\vert\ \vert\ \vert\ Q$ | 4–6/ i$\neg$ |
| 8 | $\vert\ \vert\ \vert\ Q$ | pretp. |
| 9 | $\vert\ \vert\ \vert\ Q$ | 8/ op. |
| 10 | $\vert\ \vert\ Q$ | 1, 3–7, 8–9/ i$\vee$ |
| 11 | $\vert\ P \to Q$ | 2–10/ u$\to$ |

**Zadatak 7. (bodovi:** $5 \times 3 = 15$)

Za sve iskaze $P$ i $Q$, definiramo novi logički poveznik '|' na sljedeći način:

$$P|Q =_{def} \neg P \vee \neg Q$$

Koristeći samo simbole $|, A, B, (, )$ zapišite sljedeće iskaze:

1. $\neg A \equiv A|A$
2. $A \vee A \equiv (A|A)|(A|A)$
3. $A \wedge A \equiv (A|A)|(A|A)$
4. $A \to B \equiv A|(B|B)$
5. $A \wedge \neg(B \to A) \equiv$

   $(((A|(A|A))|(A|(A|A)))|B)|(((A|(A|A))|(A|(A|A)))|B)$

   ili

   $(A|((B|(A|A))|(B|(A|A))))|(A|((B|(A|A))|(B|(A|A))))$

**Napomena: Svaki zapisani iskaz nužno mora sadržavati simbol '|'!**

**Zadatak 8.** **(bodovi:** $24 \times 2 = 48$)

| 1. | 2. |
|---|---|
| `Ništa lijepo nije odbojno.` | `Ništa lijepo nije odbojno.` |
| `Neke umjetnine su odbojne.` | `Neke umjetnine nisu odbojne.` |
| `????` | `????` |

Dolje navedeni iskazi su prijedlozi za konkluziju gornjih zaključaka. Upišite **DA** uz one iskaze koji bi zaključak učinili valjanim, u protivnom upišite **NE**!

**Zaključci ne trebaju biti shvaćeni isključivo kao kategorički silogizmi.**

| / | **Konkluzija** | **1.** | **2.** |
|---|---|---|---|
| 1. | `Nešto lijepo nisu umjetnine.` | *NE* | *NE* |
| 2. | `Neke umjetnine su lijepe.` | *NE* | *NE* |
| 3. | `Neke umjetnine su odbojne.` | *DA* | *NE* |
| 4. | `Nešto odbojno jesu umjetnine.` | *DA* | *NE* |
| 5. | `Neke umjetnine nisu odbojne.` | *NE* | *DA* |
| 6. | `Nešto odbojno nisu umjetnine.` | *NE* | *NE* |
| 7. | `Ništa odbojno nije lijepo.` | *DA* | *DA* |
| 8. | `Sve je ne-lijepo ili ništa nije odbojno.` | *NE* | *NE* |
| 9. | `Neke umjetnine su odbojne ili sve umjetnine su odbojne.` | *DA* | *NE* |
| 10. | `Nešto ne-odbojno su umjetnine.` | *NE* | *DA* |
| 11. | `Nešto lijepo je odbojno samo ako su sve umjetnine odbojne a neke i lijepe.` | *DA* | *DA* |
| 12. | `Ako nešto odbojno nije ne-lijepo, onda neke umjetnine nisu umjetnine.` | *DA* | *DA* |

**Zadatak 9. (bodovi:** $9 \times 3 = 27$)

Reducirajte skup iskaza $\Gamma = \{\neg P \to \neg Q, (Q \to R) \to (C \lor A), \neg(Q \to R), A \land \neg P, ((Q \to P) \leftrightarrow \neg R) \land (A \lor P)\}$ na minimalni skup $\Delta$ ($\Delta \subseteq \Gamma$) iz kojeg slijedi zadani iskaz ili napišite 'NE' ako iz $\Gamma$ ne slijedi taj iskaz. Za neki skup $\Delta$ kažemo da je minimalan skup iz kojeg slijedi neki iskaz $P$ ako i samo ako su potrebni svi članovi skupa $\Delta$ da bi iskaz $P$ slijedio iz $\Delta$.

1. $R$
2. $P \to Q$
3. $Q \to P$
4. $P$
5. $A \leftrightarrow \neg Q$
6. $A \land \neg A$
7. $((P \to Q) \to P) \to P$
8. $(((A \to A) \to A) \to A) \to A$
9. $(A \to (B \to A)) \land (B \to B)$

Rješenja:

1. $\Delta = \{\neg P \to \neg Q, \neg(Q \to R), A \land \neg P\}$ ili $\{\neg(Q \to R), A \land \neg P, ((Q \to P) \leftrightarrow \neg R) \land (A \lor P)\}$
2. $\Delta = \{\neg(Q \to R)\}$ ili $\{A \land \neg P\}$
3. $\Delta = \{\neg P \to \neg Q\}$
4. $\Delta = \{\neg P \to \neg Q, \neg(Q \to R)\}$
5. $\Delta = \{\neg P \to \neg Q, A \land \neg P\}$
6. $\Delta = \{\neg P \to \neg Q, \neg(Q \to R), A \land \neg P\}$ ili $\{\neg(Q \to R), A \land \neg P, ((Q \to P) \leftrightarrow \neg R) \land (A \lor P)\}$
7. $\Delta = \emptyset$
8. $\Delta = \{A \land \neg P\}$
9. $\Delta = \emptyset$

**Zadatak 10. (bodovi:** $3 \times 3 = 9$)

Neka '$x^\dagger$' znači 'sljedbenik od $x$'. Uz pomoć te funkcije sljedbenika, operaciju zbrajanja na prirodnim brojevima rekurzivno definiramo kao:

1. $x + 0 =_{def} x$
2. $x + y^\dagger =_{def} (x + y)^\dagger$

Koristeći samo simbole $x, y, +, \cdot, =_{def}, 0, (, ),^\dagger$ rekurzivno definirajte sljedeće slučaje množenja nad prirodnim brojevima.

1. $x \cdot 0 =_{def} 0$
2. $x \cdot 0^\dagger =_{def} x$
3. $x \cdot y^\dagger =_{def} (x \cdot y) + x$

**Napomena**: *Uočite svojstvo rekurzivne definicije: Prvo u (1.) definiramo početni slučaj, a u (2.) definiramo svaki sljedeći, ali jedan po jedan. Posebno uočite da smo u slučaju (2.) definirali zbroj nekog broja $x$ i sljedbenika nekog broja $y$ kao sljedbenik zbroja $x + y$.*