

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ LOGIKE – B

1. ožujka 2019.

## BODOVI\*:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAX BODOVA
1.		51
2.		27
3.		36
4.		39
5.		39
6.		24
<b>UKUPNO</b>		<b>216</b>

\*Posebna napomena za bodovanje navedena je u 3. i 4. zadatku.

Vrijeme rješavanja testa: 120 minuta

**Zadatak 1.**

Mačka Annie zaključuje na sljedeći način:

*Samo ako nisam dobila poslasticu i nisam dobila salamu, jest ću konzerviranu hranu. Ako ću jesti konzerviranu hranu, dobit ću dodatno maženje i novu igračku. Stoga, ako dobijem novu igračku, nije tako da sam dobila poslasticu i salamu.*

Istinitosnim stablom odredite je li Annien zaključak valjan. Koristeći se sljedećim oznakama, zagradama i veznicima  $\neg$ ,  $\vee$ ,  $\wedge$  i  $\rightarrow$  zapišite premise i konkluziju, s tim da prijevod mora strukturom odgovarati rečenicama prirodnog jezika.

$P$  ... Annie je dobila poslasticu

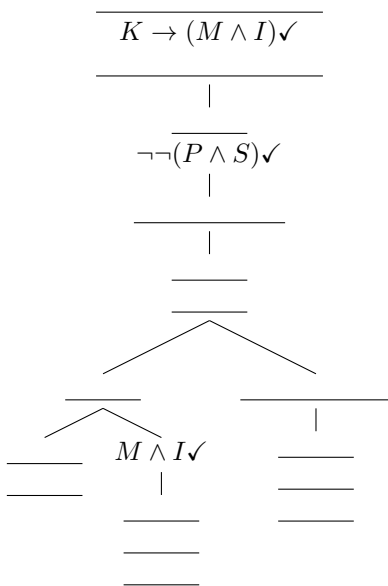
$S$  ... Annie je dobila salamu

$K$  ... Annie će jesti konzerviranu hranu

$M$  ... Annie će dobiti dodatno maženje

$I$  ... Annie će dobiti novu igračku

Nadopunite istinitosno stablo u skladu s pravilima grananja tako da iskazi budu pravilno formirani. Ne zaboravite unijeti oznake raščlanjenosti iskaza ("kvačice") i zatvorenosti grana ("križiće" i "kružiće"). Nije potrebno upisivati opravdanja.



Zaokružite točan odgovor: Zaključak **je** / **nije** valjan.

(17×3 boda = 51 bod)

**Zadatak 2.**

Odredite jesu li iskazi tautologije (T), zadovoljivi/ispunjivi (Z), nevaljani/oborivi (O) te kontradikcije (K). Za svaki iskaz zaokružite **sva svojstva** koja o njemu vrijede (ne samo ona koja ga "najbolje opisuju").

- a)  $Q \rightarrow (P \rightarrow P)$  T Z O K
- b)  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$  T Z O K
- c)  $Q \leftrightarrow (P \wedge (P \rightarrow Q))$  T Z O K
- d)  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$  T Z O K
- e)  $\neg(P \leftrightarrow \neg Q) \leftrightarrow \neg(Q \leftrightarrow P)$  T Z O K
- f)  $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q))$  T Z O K
- g)  $(P \rightarrow \neg Q) \wedge ((Q \wedge (Q \rightarrow P)) \vee \neg(Q \rightarrow \neg P))$  T Z O K
- h)  $(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$  T Z O K
- i)  $\neg(\neg P \wedge Q) \rightarrow (((S \rightarrow \neg P) \rightarrow (\neg P \wedge Q)) \rightarrow (S \wedge P))$  T Z O K

(9×3 boda = 27 bodova)

### Zadatak 3.

Mačke Annie i Frozen usuglašavaju se oko sljedećih prijepornih tvrdnji:

- $H \dots$  moguće je jesti hranu koja dodiruje dno posude;
- $K \dots$  krilo vlasnika je udoban ležaj;
- $L \dots$  tipkovnica laptopa je dobro mjesto za doskok;
- $O \dots$  u redu je povremeno, prilikom maženja, ne ozlijediti vlasnike.

Mačke komuniciraju *mjaucima*. Mjauk je isključivo je bilo koji iskaz za koji vrijedi sljedeće:

- ne sadrži druge simbole osim zagrada i:  $H, K, L, O, \wedge, \vee$ .
- ne sadrži više javljanja (pojava, nastupa) istog jednostavnog iskaza;
- čitajući s lijeva na desno, jednostavni se iskazi javljaju u abecednom poretku;
- u istinitosnoj tablici s obzirom na jednostavne iskaze  $H, K, L$  i  $O$  (dakle tablici sa šesnaest redaka), broj redaka za koje je mjauk istinit različit je i od **nula** i **šest**;
- ne postoji ekvivalentan iskaz s manje veznika, a koji također ispunjava upravo navedena pravila.

Usuglašavanje se odvija na sljedeći način.

- Svaka mačka iskazuje jedan niz mjauka (neovisno jedna o drugoj).
- Svaki mjauk (osim prvog) mora slijediti iz prethodnog, ali ne smije vrijediti i obratno.

Dopunite donje usuglašavanje tako da nizovi budu maksimalne duljine. Pojedine mjauke odvojite zarezima. Ako je više mogućih rješenja, odaberite jedno.

Annie: \_\_\_\_\_  
 $H \wedge K,$   $(H \wedge K) \vee (L \wedge O).$

Frozen: \_\_\_\_\_  
 $L \wedge O,$   $(H \wedge K) \vee (L \wedge O).$

Svaki se niz boduje na sljedeći način. Neka je  $n$  ukupan broj upisanih formula u nizu (uključno sa zadanim), a  $N$  broj formula u točnom rješenju. Ako je upisan niz podniz nekog maksimalnog niza (ili jednak nekom maksimalnom nizu), broj bodova je  $\frac{n}{N} \times 18$ . Inače, broj bodova je 0.

**(2×18 boda = 36 bodova)**

**Zadatak 4.**

Dopunite sljedeći izvod formulama i potpunim opravdanjima koja nedostaju. Kako postoje različite konvencije oko detalja u prirodnoj dedukciji, dobro proučite pravila u prilogu (na posljednjim stranicama testa).

1	$(A \wedge B) \rightarrow H$	pretp.
2	$(H \rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow A$	pretp.
3	$\neg B \rightarrow \neg(H \rightarrow (E \rightarrow \neg F))$	pretp.
4	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> <math>\neg H</math> </div>	pretp.
5	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </div> </div>	pretp.
6	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </div> </div>	_____
7	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </div>	_____
8	$H \rightarrow (C \rightarrow D)$	$\rightarrow$ u, 5-7
9		_____
10	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </div>	pretp.
11	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </div>	_____
12	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </div>	_____
13	$H \rightarrow (E \rightarrow \neg F)$	$\rightarrow$ u, 10-12
14	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </div>	pretp.
15	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </div>	_____
16	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </div>	_____
17	$\neg\neg B$	$\neg$ u, 14-16
18		_____
19	$A \wedge B$	$\wedge$ u, 9, 18
20		_____
21	$\perp$	_____
22	$\neg\neg H$	$\neg$ u, 4-21
23	$H$	$\neg$ i, 22

*Bodovanje: boduju se redci u kojima nešto treba napisati. Svaki potpuno točno ispunjen redak nosi 3 boda, nepromijenjen 1 bod, inače 0 bodova.*

**(13×3 boda = 39 bodova)**

**Zadatak 5.**

Zadan je skup  $\Gamma$  koji se sastoji upravo od sljedećih šest iskaza:

1.  $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
2.  $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg B)$
3.  $\neg A \vee ((B \vee C) \rightarrow (\neg B \wedge C))$
4.  $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \leftrightarrow \neg B)$
5.  $\neg(((A \rightarrow C) \rightarrow (A \wedge C)) \wedge \neg B)$
6.  $(A \rightarrow C) \wedge (\neg C \wedge A)$

a) Za svaki od iskaza 1.–6. iz skupa  $\Gamma$  navedite najmanji njemu ekvivalentan iskaz koji sadrži samo standardne logičke veznike, tj. iskaz s najmanjim brojem (možda nulom) pojavaka (pojava, nastupa, javljanja) veznika  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  i  $\leftrightarrow$ . Osim navedenih veznika, u rješenjima koristite samo jednostavne iskaze  $A$  i  $B$ . Ako ima više rješenja, napišite samo jedno.

- |          |          |          |
|----------|----------|----------|
| 1. _____ | 2. _____ | 3. _____ |
| 4. _____ | 5. _____ | 6. _____ |

**(6×3 boda = 18 bodova)**

b) U odgovorima na sljedeća pitanja imajte na umu da je i sam skup  $\Gamma$  podskup skupa  $\Gamma$ . Ostale podskupove skupa  $\Gamma$  označavajte tako da unutar vitičastih zagrada kao imena iskaza upišete brojke koje stoje ispred iskaza. Na primjer,  $\{1\}$  je skup koji kao svoj jedini član ima iskaz  $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ , a  $\{1, 2\}$  skup kojega su jedini članovi iskazi  $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$  i  $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg B)$ . Ako ima više točnih rješenja, napišite samo jedno.

- i. Je li skup  $\Gamma$  suvisao?            DA / NE
- ii. Koji je najveći suvisao podskup skupa  $\Gamma$ ?  
\_\_\_\_\_
- iii. Koji je broj elemenata minimalan podskup skupa  $\Gamma$  iz kojega slijedi iskaz  $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg(A \wedge \neg B)$ ?  
\_\_\_\_\_
- iv. Koji je broj elemenata minimalan podskup skupa  $\Gamma$  iz kojega slijedi iskaz  $(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ ?  
\_\_\_\_\_
- v. Koji je broj elemenata minimalan suvisao podskup skupa  $\Gamma$  iz kojega slijedi iskaz  $(\neg A \leftrightarrow B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ ?  
\_\_\_\_\_
- vi. Koji je broj elemenata maksimalan podskup skupa  $\Gamma$  iz kojega slijedi iskaz  $\neg(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ ?  
\_\_\_\_\_
- vii. Koji je broj elemenata minimalan suvisao podskup skupa  $\Gamma$  iz kojega slijedi iskaz  $B \vee C$ ?  
\_\_\_\_\_

**(7×3 boda = 21 bod)**

**(Ukupno 39 bodova.)**

### Zadatak 6.

Svi iskazi iskazne logike mogu se nekim postupkom (primjerice prema abecednom redu i broju pojavaka (pojava, nastupa, javljanja) simbola u iskazima) na različite načine poredati u *beskonačan* niz iskaza: prvi iskaz, drugi iskaz, treći iskaz, itd. Uzimajući iskaze jedan za drugim i slijedeći postupak izgradnje niza skupova  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ , opisan u trećem podzadatku prethodnoga zadatka (osim ovoga, zadaci inače nisu povezani), dobivamo beskonačan skup iskaza  $\Gamma_\omega$ , koji sadrži upravo one iskaze koji se javljaju u barem jednom od skupova  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ . Skup  $\Gamma_\omega$  ima zanimljivo logičko svojstvo: taj je skup iskaza suvisao (zadovoljiv, konzistentan), no svako proširenje toga skupa nekim novim iskazom (tj. bilo kojim iskazom iskazne logike koji nije član toga skupa) rezultira nesuvislim (nezadovoljivim, inkonzistentnim) skupom. Svaki suvisao skup iskaza iskazne logike koji proširen novim iskazom daje nesuvisao skup nazivamo maksimalnim suvislim skupom iskaza iskazne logike. Za svaki mogući poredak iskaza u beskonačnom nizu,  $\Gamma_\omega$  je maksimalan suvisao skup. Jesu li sljedeće tvrdnje o maksimalnim suvislim skupovima iskaza iskazne logike (MSS) istinite?

**Napomena:** U iskaznoj logici iskaz  $P$  slijedi iz beskonačnoga skupa iskaza  $\Gamma$  ako i samo ako  $P$  slijedi iz nekog konačnog podskupa od  $\Gamma$ .

- |  |         |
|--|---------|
| 1. Najviše je jedan skup iskaza MSS.                                 | DA / NE |
| 2. Svaki konačan suvisao skup iskaza podskup je barem jednoga MSS-a. | DA / NE |
| 3. Ako iskaz $P$ slijedi iz MSS-a, $P$ je tautologija.               | DA / NE |
| 4. Svaki MSS kao članove sadrži samo tautologije.                    | DA / NE |
| 5. Sve su tautologije članovi barem jednog MSS-a.                    | DA / NE |
| 6. MSS može kao svoj član sadržavati kontradikciju.                  | DA / NE |
| 7. Postoji član MSS-a koji ne slijedi iz MSS-a.                      | DA / NE |
| 8. Svi iskazi koji ne sadrže nijek članovi su svakog MSS-a.          | DA / NE |

(8×3 boda = 24 boda)