ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ LOGIKE

1. OŽUJKA 2022.

Zaporka:

(peteroznamenkasti broj i riječ)

BODOVI*:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

ZADATAK	**BROJ BODOVA**	**MAX BODOVA**
1.		48
2.		18
3.		48
UKUPNO		**114**

Vrijeme rješavanja testa: 120 minuta

Zadatak 1.

Obligationes su vrsta logičke igre/vježbe (ili formalizirane rasprave) uobičajene u srednjovjekovnoj logici. Igrala se između dvojice sudionika: oponenta (*opponens*) i respondenta (*respondens*). U jednoj varijanti igre, oponent bi igru započeo postavivši neki početni sud (*positum*), često bjelodano neistinit, koji je respondent bio obvezan prihvatiti kao zadan. Oponent bi zatim nastavljao iznoseći jedan za drugim niz sudova, dok bi respondent nakon svakoga iznesenoga suda morao kazati prihvaća li ga (*concedo*), odbacuje (*nego*) ili pak dvoji o njemu (*dubito*). Prema pravilu, respondent je morao prihvatiti svaki sud koji bi logički slijedio iz skupa sudova koje je prethodno prihvatio (uključujući tu, dakako, i *positum*) i odbaciti svaki sud koji bi protuslovio skupu prethodno prihvaćenih sudova, dok bi sudove koji niti slijede iz prethodno prihvaćenih sudova niti im protuslove prihvaćao ako bi procijenio da su istiniti i odbacivao ako bi procijenio da su neistiniti. Respondentov je cilj sačuvati konzistentnost svojih odgovora, oponentov je cilj dovesti respondenta u protuslovlje. Rasprave o *obligationes* tvorile su zaseban žanr logičke literature i njima u velikoj mjeri dugujemo kristalizaciju mnogih središnjih logičkih pojmova, primjerice pojmova konzistentnosti, logičke nužnosti, logičke mogućnosti i dr. U ovom ćete zadatku igrati prilagođenu inačicu te logičke igre.

A) U ovom podzadatku imate ulogu respondenta. U lijevom je stupcu niz iskaza p_0, p_1, ..., p_{10}, gdje je iskaz p_0 *positum*, nakon kojega redom slijede iskazi koje iznosi oponent. U označena mjesta u desnom stupcu uz svaki iskaz p_1, ..., p_{10} upišite jedno (i samo jedno) od slova 'C', 'N' i 'D' slijedeći niže opisana pravila.

Neka je $\Gamma_0 = \{p_0\}$. Za $n > 0$ neka je $\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \cup \{p_n\}$ ako je $\Gamma_{n-1} \cup \{p_n\}$ zadovoljiv (ispunjiv, konzistentan) skup iskaza, a $\Gamma_n = \Gamma_{n-1}$ ako je $\Gamma_{n-1} \cup \{p_n\}$ nezadovoljiv (inkonzistentan) skup iskaza. Govoreći manje formalno, za svaki n, Γ_n je skup iskaza formiran tako da su se iskazu p_0 jedan po jedan, redom i bez preskakanja, dodavali samo oni iskazi iz niza p_1, ..., p_n koji u svakom koraku s prethodno dodanim iskazima tvore zadovoljiv skup iskaza.

U naznačena mjesta u redak n u desnom stupcu treba upisati 'C' ako p_n slijedi iz Γ_{n-1}, 'N' ako je $\Gamma_{n-1} \cup \{p_n\}$ nezadovoljiv i 'D' ako ne treba upisati ni 'C' ni 'N'.

0.	$A \to \neg(B \to C)$	*positum*
1.	$\neg A \to (B \lor D)$	______
2.	$(B \to C) \to (\neg B \land \neg D)$	______
3.	$(B \to C) \to (B \lor D)$	______
4.	$(A \to (C \to B)) \to (B \to C)$	______
5.	$\neg(D \to E) \to (E \to D)$	______
6.	$\neg(B \to C) \to (\neg C \to D)$	______
7.	$(E \to E) \to (\neg C \to D)$	______
8.	$(E \lor \neg E) \to (B \land \neg B)$	______
9.	$\neg(\neg C \to D) \to A$	______
10.	$(\neg C \to D) \to A$	______

(10×3 boda = 30 bodova)

Napomena o bodovanju. Prvim bilo netočnim bilo propuštenim odgovorom (tj. praznim poljem) izgubili ste igru i boduju vam se samo *prethodni* točni odgovori, dok svako neispunjeno polje nosi jedan bod. Primjerice, ako ste unijeli točan odgovor u 1., 2. i 4. polje, a sva ostala polja ostavili praznima, dobivate 13 bodova (6 za točne odgovore u 1. i 2. polju i 7 za svako neispunjeno polje).

B) U ovom vam je podzadatku cilj rekonstruirati oponentove poteze pod pretpostavkom da je respondent ispravno odgovorio na svaki iskaz koji je oponent iznio. Pravila igre ista su kao u prethodnom podzadatku.

Malim latiničnim slovima označeni su, nasumičnim redoslijedom, svi iskazi, osim *posituma*, koje je oponent iznio u igri.

a.	$A \to \neg D$
b.	$\neg D \wedge \neg C$
c.	$\neg A \to \neg D$
d.	$B \to \neg D$
e.	$\neg D \to C$
f.	$\neg D$
g.	$\neg(D \vee C) \to \neg A$
h.	A
i.	$\neg((B \to D) \vee (D \to B))$
j.	$\neg C$

Brojevi redaka označavaju redoslijed oponentovih poteza, tj. redoslijed kojim je iznosio iskaze respondentu. U desnom je stupcu svakoga retka unesen respondentov odgovor na iskaz iz lijevoga stupca istoga retka. Pod pretpostavkom da je oponent u svakom koraku iznio različit iskaz i da je respondent svaki put točno odgovorio, utvrdite kojim je redoslijedom oponent iznosio iskaze tako da na naznačeno mjesto upišete malo latinično slovo kojim smo označili odgovarajući iskaz.

0.	$A \vee B$	*positum*
1.	d	D
2.	______	C
3.	a	D
4.	______	N
5.	______	C
6.	b	D
7.	______	N
8.	______	C
9.	h	D
10.	______	N

(6×3 boda = 18 bodova)

Napomena o bodovanju. Bodovanje je kao i u podzadatku A.

Zadatak 2.

Odredite jesu li iskazi tautologije (T), zadovoljivi/ispunjivi (Z), nevaljani/oborivi (O) ili kontradikcije (K).
Za svaki iskaz zaokružite **sva svojstva** koja o njemu vrijede (ne samo ona koja ga "najbolje opisuju").

a)	P	T Z O K
b)	$(P \to Q) \lor (Q \to P)$	T Z O K
c)	$(P \lor Q) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)$	T Z O K
d)	$\big((P \lor Q) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)\big) \to (P \lor Q)$	T Z O K
e)	$(P \lor Q) \to \big((P \lor Q) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)\big)$	T Z O K
f)	$\big((P \lor Q) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)\big) \leftrightarrow \big((P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \to \neg Q)\big)$	T Z O K

(6×3 boda = 18 bodova)

Zadatak 3.

Dopunite sljedeći izvod formulama i potpunim opravdanjima koja nedostaju. Kako postoje različite konvencije oko detalja u prirodnoj dedukciji, dobro proučite pravila u prilogu (na posljednjim stranicama testa).

1	$(P \to Q) \lor (R \to Q)$	pretp.
2		________
3		________
4		________
5		________
6		________
7		________
8		________
9		________
10		________
11		________
12		________
13	$Q \lor \neg Q$	$\neg$i, 12
14		________
15		________
16		________
17		________
18		________
19		________
20		________
21		________
22		________
23		________
24		________
25		________
26		________
27	$(P \to Q) \lor (R \to S)$	$\lor$i, 1, 2–3, 4–26

Bodovanje: boduju se redci u kojima nešto treba napisati. Svaki potpuno točno ispunjen redak (zajedno s potpunim opravdanjem) nosi 2 boda, nepromijenjen 1 bod, inače 0 bodova.

(24×2 boda = 48 bodova)

PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije

- Dedukcija može biti izvod ili dokaz. Izvod počinje jednom ili više (glavnih) premisa odvojenih od ostatka izvoda vodoravnom crtom. Dokaz nema (glavnih) premisa, što povlači da dokaz mora započeti podizvodom.
- Opravdanja se sastoje od tri podatka: simbol veznika, slovo `u` ili `i` (za uvođenje/isključenje), te jedan ili više brojeva ili brojevnih raspona. Ta tri podatka mogu biti odijeljena razmakom, zarezom, kosom crtom ili nekako drugačije. Poredak ta tri podatka proizvoljan je (to ne znači da je poredak brojeva proizvoljan). Iznimno, reiteraicija (opetovanje) ne sadrži slovo `u` ili `i`.
- Kod nekih je pravila poredak premisa iz kojih slijede proizvoljan, što je signalizirano **zvjezdicom**. Kod takvih se pravila iznimno dopušta i proizvoljan poredak u zapisu brojeva u opravdanju. Primjerice, kod uvođenja konjunkcije, redak rednog broja k mogao se pojaviti prije retka rednog broja j, a u opravdanju je u oba slučaja moglo pisati $\wedge u, j, k$ ili $\wedge u, k, j$. U sva četiri slučaja, pravilo zovemo ∧u.
- Tri točkice signaliziraju da su na njihovu mjestu možda još neki redci osim upisanih.

Uvođenje konjunkcije. *

$$\begin{array}{r|ll} j & A & \\ & \vdots & \\ k & B & \\ & \vdots & \\ & A \wedge B & \wedge\text{u, j, k} \end{array}$$

Uvođenje disjunkcije.

$$\begin{array}{r|ll} j & A & \\ & \vdots & \\ & A \vee B & \vee\text{u, j} \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} j & B & \\ & \vdots & \\ & A \vee B & \vee\text{u, j} \end{array}$$

Uvođenje kondicionala.

$$\begin{array}{r|l|ll} j & & \underline{A} & \text{pretp.} \\ & & \vdots & \\ k & & B & \\ & \multicolumn{2}{l}{A \to B} & \to\text{u, j–k} \end{array}$$

Uvođenje bikondicionala.

$$\begin{array}{r|l|ll} j & & \underline{A} & \text{pretp.} \\ & & \vdots & \\ k & & B & \\ m & & \underline{B} & \text{pretp.} \\ & & \vdots & \\ n & & A & \\ & \multicolumn{2}{l}{A \leftrightarrow B} & \leftrightarrow\text{u, j–k, m–n} \end{array}$$

Uvođenje kontradikcije. *

$$\begin{array}{r|ll} j & A & \\ & \vdots & \\ k & \neg A & \\ & \vdots & \\ & \bot & \bot\text{u, j, k} \end{array}$$

Uvođenje negacije.

$$\begin{array}{r|l|ll} j & & \underline{A} & \text{pretp.} \\ & & \vdots & \\ k & & \bot & \\ & \multicolumn{2}{l}{\neg A} & \neg\text{u, j–k} \end{array}$$

Isključenje konjunkcije.

$$\begin{array}{r|ll} j & A \wedge B & \\ & \vdots & \\ & A & \wedge\text{i, j} \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} j & A \wedge B & \\ & \vdots & \\ & B & \wedge\text{i, j} \end{array}$$

Isključenje disjunkcije.

$$\begin{array}{r|l|ll} e & \multicolumn{2}{l}{A \vee B} & \\ & \multicolumn{2}{l}{\vdots} & \\ j & & \underline{A} & \text{pretp.} \\ & & \vdots & \\ k & & C & \\ m & & \underline{B} & \text{pretp.} \\ & & \vdots & \\ n & & C & \\ & \multicolumn{2}{l}{C} & \vee\text{i, e, j–k, m–n} \end{array}$$

Isključenje kondicionala. *

$$\begin{array}{r|ll} j & A \to B & \\ & \vdots & \\ k & A & \\ & \vdots & \\ & B & \to\text{i, j, k} \end{array}$$

Isključenje bikondicionala. *

$$\begin{array}{r|ll} j & A \leftrightarrow B & \\ & \vdots & \\ k & A & \\ & \vdots & \\ & B & \leftrightarrow\text{i, j, k} \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} j & A \leftrightarrow B & \\ & \vdots & \\ k & B & \\ & \vdots & \\ & A & \leftrightarrow\text{i, j, k} \end{array}$$

Isključenje kontradikcije.

$$\begin{array}{r|ll} j & \bot & \\ & \vdots & \\ & A & \bot\text{i, j} \end{array}$$

Isključenje negacije.

$$\begin{array}{r|ll} j & \neg\neg A & \\ & \vdots & \\ & A & \neg\text{i, j} \end{array}$$

Reiteracija (opetovanje).

$$\begin{array}{r|ll} j & A & \\ & \vdots & \\ & A & \text{re., j (ili op., j)} \end{array}$$

COMPETIZIONE DI LOGICA

LIVELLO REGIONALE

1 MARZO 2022

Codice di identificazione:						

(un numero di cinque cifre e una parola)

Punteggio:

- la soluzione è completamente esatta: 3 punti
- non ci sono le soluzioni: 1 punto
- la soluzione è errata o incompleta: 0 punti

ESERCIZIO	PUNTEGGIO	PUNTEGGIO MASSIMO
1.		48
2.		18
3.		48
TOTALE		114

Il tempo a disposizione per la risoluzione dei quesiti è: 120 minuti.

Esercizio 1.

Le *obbligazioni* sono una specie di giochi/esercizi logici (o argomentazioni formalizzate) comuni nella logica medievale. Le argomentazioni/giochi avvenivano tra due partecipanti: l'opponente (*opponens*) e il rispondente (*respondens*). In una variante dei giochi l'opponente aveva il compito di iniziare il gioco proponendo un determinato giudizio iniziale (*positum*), spesso palesemente falso, che il rispondente aveva l'obbligo di accettare come dato di fatto. L'opponente proponeva quindi di volta in volta un giudizio al rispondente che doveva valutare se accettarlo (*concedo*), rifiutarlo (*nego*) o mantenere ancora dei dubbi su di esso (*dubito*). In base alle regole il rispondente doveva accettare qualsiasi giudizio che fosse una conseguenza logica di un insieme di giudizi precedentemente accettati (compreso, ovviamente, il *positum*) e respingere qualsiasi giudizio che contraddicesse tale insieme di giudizi, mentre per i giudizi che non erano conseguenza logica di un insieme di giudizi precedentemente accettati o della sua negazione, li accettava nel caso in cui li giudicasse veri e li respingeva se li giudicava falsi. L'obiettivo del rispondente era quello di preservare la coerenza delle sue risposte mentre quello dell'opponente era quello di portare l'avversario in contraddizione. Le argomentazioni delle *obbligazioni* hanno creato un genere di letteratura logica a parte e in larga misura dobbiamo a loro la creazione di gran parte dei concetti logici principali, come il concetto di consistenza/fluidità, di necessità logica, di possibilità logiche, ecc. In questo esercizio giocherai una versione adattata di questo gioco di logica.

A) In questa prima parte, tu hai il ruolo di rispondente. Nella colonna a sinistra si trovano i giudizi $p_0, p_1, \dots, p_{10}$, dove p_0 rappresenta il *positum*, di seguito poi ci sono i giudizi dell'opponente. Negli spazi vuoti della colonna a destra, accanto a ogni giudizio $p_0, p_1, \dots, p_{10}$ devi scrivere una (e una sola) delle seguenti lettere 'C', 'N' e 'D' rispettando le regole sottostanti.

Sia $\Gamma_0 = \{p_0\}$. Per $n > 0$, se $\Gamma_{n-1} \cup \{p_n\}$ è un insieme accettabile (soddisfacente, vero) di giudizi, allora $\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \cup \{p_n\}$, mentre se $\Gamma_{n-1} \cup \{p_n\}$ non è un insieme accettabile (insoddisfacente, falso) di giudizi allora $\Gamma_n = \Gamma_{n-1}$. Spiegando in modo meno formale, per ogni n, Γ_n è un insieme di giudizi formato nel seguente modo: a p_0 aggiungiamo uno per uno, in ordine e senza salti, solo quei giudizi della sequenza $p_1, \dots, p_n$ che, ad ogni passo, assieme al giudizio precedente formino un insieme accettabile di giudizi.

Negli spazi vuoti della colonna a destra, nella riga n, va inserito 'C' se p_n deriva da Γ_{n-1}, 'N' se $\Gamma_{n-1} \cup \{p_n\}$ è inaccettabile e 'D' se non è necessario inserire né 'C' né 'N'.

0.	$A \to \neg(B \to C)$	*positum*
1.	$\neg A \to (B \lor D)$	______
2.	$(B \to C) \to (\neg B \land \neg D)$	______
3.	$(B \to C) \to (B \lor D)$	______
4.	$(A \to (C \to B)) \to (B \to C)$	______
5.	$\neg(D \to E) \to (E \to D)$	______
6.	$\neg(B \to C) \to (\neg C \to D)$	______
7.	$(E \to E) \to (\neg C \to D)$	______
8.	$(E \lor \neg E) \to (B \land \neg B)$	______
9.	$\neg(\neg C \to D) \to A$	______
10.	$(\neg C \to D) \to A$	______

(10 × 3 punti = 30 punti)

Osservazione sulla valutazione: la prima risposta sbagliata o assente (cioè uno spazio vuoto) indica che hai perso il gioco e quindi vengono valutate solamente le risposte esatte precedenti, mentre ogni spazio vuoto vale un punto. Per esempio, se hai inserito la risposta esatta negli spazi 1, 2 e 4 e hai lasciato vuoti tutti gli altri campi, ottieni 13 punti (6 per le risposte esatte nei campi 1 e 2 e 7 punti per i campi vuoti).

B) In questa parte, il tuo obiettivo è ricostruire le mosse dell'opponente assumendo che il rispondente abbia sempre risposto correttamente a ogni giudizio posto dall'opponente. Le regole del gioco sono le stesse della prima parte.

Con le lettere minuscole, sono stati indicati tutti i giudizi che l'opponente ha proposto nel gioco, in ordine casuale, escluso il *positum*.

a. $A \to \neg D$
b. $\neg D \wedge \neg C$
c. $\neg A \to \neg D$
d. $B \to \neg D$
e. $\neg D \to C$
f. $\neg D$
g. $\neg(D \vee C) \to \neg A$
h. A
i. $\neg((B \to D) \vee (D \to B))$
j. $\neg C$

I numeri di riga indicano l'ordine delle mosse dell'opponente, cioè l'ordine in cui ha fornito i giudizi al rispondente. Nella colonna a destra, per ogni riga, è inserita la risposta del rispondente al giudizio corrispondente presente nella colonna a sinistra. Supponendo che l'opponente abbia fatto una dichiarazione diversa ad ogni passaggio e che il rispondente avesse, ogni volta, risposto correttamente, determinare l'ordine in cui l'opponente ha presentato i suoi giudizi inserendo negli spazi vuoti la lettera minuscola del corrispondente giudizio.

0.	$A \vee B$	*positum*
1.	d	D
2.	______	C
3.	a	D
4.	______	N
5.	______	C
6.	b	D
7.	______	N
8.	______	C
9.	h	D
10.	______	N

(6 × 3 punti = 18 punti)

Osservazione sulla valutazione: il punteggio va calcolato come per la parte **A** di questo esercizio.

Esercizio 2.

Determinare se le proposizioni (formule) sono tautologie (T), soddisfacibili (Z), non valide/non soddisfacibili (O) o contraddizioni (K). Per ogni proposizione, cerchia **tutte le proprietà** appartenenti ad essa (non solo quelle che la "descrivono meglio").

a)	P	T Z O K
b)	$(P \to Q) \lor (Q \to P)$	T Z O K
c)	$(P \lor Q) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)$	T Z O K
d)	$\big((P \lor Q) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)\big) \to (P \lor Q)$	T Z O K
e)	$(P \lor Q) \to \big((P \lor Q) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)\big)$	T Z O K
f)	$\big((P \lor Q) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)\big) \leftrightarrow \big((P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \to \neg Q)\big)$	T Z O K

(6 × 3 punti = 18 punti)

Esercizio 3.
Completa la seguente argomentazione con le proposizioni e le regole di inferenza mancanti. Si consiglia di studiare bene le regole della deduzione naturale allegate (nelle ultime pagine del testo) in quanto ci sono diverse convenzioni particolari.

1	$(P \to Q) \vee (R \to Q)$	assunzione
2		________
3		________
4		________
5		________
6		________
7		________
8		________
9		________
10		________
11		________
12		________
13	$Q \vee \neg Q$	$\neg$i, 12
14		________
15		________
16		________
17		________
18		________
19		________
20		________
21		________
22		________
23		________
24		________
25		________
26		________
27	$(P \to Q) \vee (R \to S)$	$\vee$i, 1, 2–3, 4–26

Valutazione: si valutano solamente le righe in cui è necessario inserire una risposta. Ogni riga riempita in modo completo e esatto (assieme alle regole di inferenza complete) vale 2 punti, se viene lasciata vuota vale 1 punto, altrimenti 0 punti.

(24 × 2 punti = 48 punti)

ALLEGATO: regole della deduzione naturale consentite

• La deduzione può essere una derivazione o una dimostrazione. La derivazione inizia con una o più premesse/assunzioni (principali) separate dal resto della derivazione da una linea orizzontale. Nella dimostrazione invece non ci sono premesse/assunzioni (principali), il che implica che la dimostrazione deve iniziare con una derivazione secondaria.
• Le regole di inferenza sono costituite da tre simboli: il simbolo della congiunzione, la lettera **u** o la lettera **i** (per introduzione (**u**) / eliminazione (**i**)) e uno o più numeri o intervalli di numeri. Questi tre simboli possono essere separati da uno spazio, una virgola, una barra o altro. L'ordine di questi tre dati è arbitrario (ciò non significa che l'ordine dei numeri sia a sua volta arbitrario). Eccezionalmente, la reiterazione non contiene una delle lettere **u** o **i**.
• Per alcune regole è arbitrario l'ordine delle premesse da cui esse seguono e ciò è indicato da un **asterisco**. Dove si hanno tali regole è ammesso un ordine arbitrario dei numeri nelle regole di inferenza. Ad esempio, quando si introduce una congiunzione il numero di riga k potrebbe apparire prima del numero di riga j, e nella condizione in entrambi i casi si potrebbe scrivere ∧u, j, k oppure ∧u, k, j. In tutti e quattro i casi, la regola è chiamata ∧u.
• I tre punti indicano che potrebbero esserci altre righe oltre a quelle scritte.

Introduzione della congiunzione.*

j	A	
	⋮	
k	B	
	⋮	
	$A \wedge B$	∧u, j, k

Introduzione della disgiunzione.

j	A	
	⋮	
	$A \vee B$	∨u, j

j	B	
	⋮	
	$A \vee B$	∨u, j

Introduzione del condizionale.

j	A	assunzione
	⋮	
k	B	
	$A \to B$	→u, j–k

Introduzione del bicondizionale/equivalenza.

j	A	assunzione
	⋮	
k	B	
m	B	assunzione
	⋮	
n	A	
	$A \leftrightarrow B$	↔u, j–k, m–n

Eliminazione della congiunzione.

j	$A \wedge B$	
	⋮	
	A	∧i, j

j	$A \wedge B$	
	⋮	
	B	∧i, j

Eliminazione della disgiunzione.

e	$A \vee B$	
	⋮	
j	A	assunzione
	⋮	
k	C	
m	B	assunzione
	⋮	
n	C	
	C	∨i, e, j–k, m–n

Eliminazione del condizionale.*

j	$A \to B$	
	⋮	
k	A	
	⋮	
	B	→i, j, k

Introduzione della contraddizione. *

j	A	
	$\vdots$	
k	$\neg A$	
	$\vdots$	
	$\bot$	$\bot$u, j, k

Introduzione della negazione.

j	A	assunzione
	$\vdots$	
k	$\bot$	
	$\neg A$	$\neg$u, j–k

Eliminazione del bicondizionale/equivalenza.*

j	$A \leftrightarrow B$	
	$\vdots$	
k	A	
	$\vdots$	
	B	$\leftrightarrow$i, j, k

j	$A \leftrightarrow B$	
	$\vdots$	
k	B	
	$\vdots$	
	A	$\leftrightarrow$i, j, k

Eliminazione della contraddizione.

j	$\bot$	
	$\vdots$	
	A	$\bot$i, j

Eliminazione della negazione.

j	$\neg\neg A$	
	$\vdots$	
	A	$\neg$i, j

Reiterazione.

j	A	
	$\vdots$	
	A	re., j (ili op., j)