

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ LOGIKE – A

1. ožujka 2019.

BODOVI*:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAX BODOVA
1.		27
2.		21
3.		36
4.		51
5.		51
6.		24
UKUPNO		210

*Posebna napomena za bodovanje navedena je u 3. i 4. zadatku.

Vrijeme rješavanja testa: 120 minuta

Zadatak 1.

Odredite jesu li iskazi tautologije (T), zadovoljivi/ispunjivi (Z), nevaljani/oborivi (O) te kontradikcije (K). Za svaki iskaz zaokružite **sva svojstva** koja o njemu vrijede (ne samo ona koja ga “najbolje opisuju”).

- | | | |
|----|---|---------|
| a) | $Q \rightarrow (P \rightarrow P)$ | T Z O K |
| b) | $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$ | T Z O K |
| c) | $Q \leftrightarrow (P \wedge (P \rightarrow Q))$ | T Z O K |
| d) | $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ | T Z O K |
| e) | $\neg(P \leftrightarrow \neg Q) \leftrightarrow \neg(Q \leftrightarrow P)$ | T Z O K |
| f) | $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q))$ | T Z O K |
| g) | $(P \rightarrow \neg Q) \wedge ((Q \wedge (Q \rightarrow P)) \vee \neg(Q \rightarrow \neg P))$ | T Z O K |
| h) | $(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ | T Z O K |
| i) | $\neg(\neg P \wedge Q) \rightarrow (((S \rightarrow \neg P) \rightarrow (\neg P \wedge Q)) \rightarrow (S \wedge P))$ | T Z O K |

(9×3 boda = 27 bodova)

Zadatak 2.

Pojam X podređen (subordiniran) je pojmu Y ako je svaki element opsega pojma X ujedno element opsega pojma Y . Pojam X nadređen (subordiniran) je pojmu Y ako je svaki element opsega pojma Y ujedno element opsega pojma X . Pojmovi X i Y su razdvojeni ako ne postoji predmet koji se nalazi u oba pripadna opsega. Smatramo da je nešto u opsegu pojma $\neg X$ ako i samo ako ne pripada opsegu pojma X . Pojmovi mogu imati prazan opseg.

Jesu li sljedeće tvrdnje istinite za **sve** pojmove A , B i C ?

- Ako je pojam A podređen pojmu B , onda je $\neg B$ nadređen pojmu $\neg A$. DA / NE
- Ako je pojam B podređen pojmu $\neg A$, onda je $\neg B$ podređen pojmu B . DA / NE
- Ako je pojam A podređen pojmu $\neg B$, a $\neg B$ podređen pojmu $\neg C$, onda je C podređen pojmu $\neg A$. DA / NE
- Ako je pojam A podređen i pojmu B i pojmu C , onda je B podređen pojmu C , ili C podređen pojmu A . DA / NE
- Ako su pojmovi A i B razdvojeni, te uz to pojmovi B i C razdvojeni, onda vrijedi barem jedno od sljedećeg: A i C su također razdvojeni; ili je A podređen pojmu $\neg C$. DA / NE
- Ako su pojmovi A i B razdvojeni, pojam C podređen pojmu A , te pojam B podređen pojmu D , onda vrijedi jedno od sljedećeg: D nije podređen pojmu $\neg C$, ili je pojam B razdvojen od samog sebe. DA / NE
- Ako su pojmovi A i B razdvojeni, pojam C podređen pojmu A , te pojam $\neg B$ podređen pojmu $\neg C$, onda je pojam $\neg C$ nadređen pojmu C . DA / NE

(7×3 boda = 21 bod)

Zadatak 3.

Mačke Annie i Frozen usuglašavaju se oko sljedećih prijepornih tvrdnji:

- $H \dots$ moguće je jesti hranu koja dodiruje dno posude;
- $K \dots$ krilo vlasnika je udoban ležaj;
- $L \dots$ tipkovnica laptopa je dobro mjesto za doskok;
- $O \dots$ u redu je povremeno, prilikom maženja, ne ozlijediti vlasnike.

Mačke komuniciraju *mjaucima*. Mjauk je isključivo bilo koji iskaz za koji vrijedi sljedeće:

- ne sadrži druge simbole osim zagrada i: H, K, L, O, \wedge, \vee .
- ne sadrži više javljanja (pojava, nastupa) istog jednostavnog iskaza;
- čitajući s lijeva na desno, jednostavni se iskazi javljaju u abecednom poretku;
- u istinitosnoj tablici s obzirom na jednostavne iskaze H, K, L i O (dakle tablici sa šesnaest redaka), broj redaka za koje je mjauk istinit različit je i od **nula** i **šest**;
- ne postoji ekvivalentan iskaz s manje veznika, a koji također ispunjava upravo navedena pravila.

Usuglašavanje se odvija na sljedeći način.

- Svaka mačka iskazuje jedan niz mjauka (neovisno jedna o drugoj).
- Svaki mjauk (osim prvog) mora slijediti iz prethodnog, ali ne smije vrijediti i obratno.

Dopunite donje usuglašavanje tako da nizovi budu maksimalne duljine. Pojedine mjauke odvojite zarezima. Ako je više mogućih rješenja, odaberite jedno.

Annie: _____
 $H \wedge K,$ $(H \wedge K) \vee (L \wedge O).$

Frozen: _____
 $L \wedge O,$ $(H \wedge K) \vee (L \wedge O).$

Svaki se niz boduje na sljedeći način. Neka je n ukupan broj upisanih formula u nizu (uključno sa zadanim), a N broj formula u točnom rješenju. Ako je upisan niz podniz nekog maksimalnog niza (ili jednak nekom maksimalnom nizu), broj bodova je $\frac{n}{N} \times 18$. Inače, broj bodova je 0.

(2×18 boda = 36 bodova)

Zadatak 4.

Dopunite sljedeći izvod formulama i potpunim opravdanjima koja nedostaju. Kako postoje različite konvencije oko detalja u prirodnoj dedukciji, dobro proučite pravila u prilogu (na posljednjim stranicama testa).

1		$(A \wedge B) \rightarrow H$	pretp.
2		$(H \rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow A$	pretp.
3		$\neg B \rightarrow \neg(H \rightarrow (E \rightarrow \neg F))$	pretp.
4		$\neg H$	pretp.
5			pretp.
6			_____
7			_____
8			_____
9			_____
10			pretp.
11			_____
12			_____
13			_____
14			pretp.
15			_____
16			_____
17			_____
18			_____
19			_____
20			_____
21		\perp	_____
22		$\neg\neg H$	\neg -u, 4-21
23		H	\neg -i, 22

Bodovanje: boduju se redci u kojima nešto treba napisati. Svaki potpuno točno ispunjen redak nosi 3 boda, nepromijenjen 1 bod, inače 0 bodova.

(17×3 boda = 51 bod)

Zadatak 5.

Zadan je skup Γ koji se sastoji upravo od sljedećih šest iskaza:

1. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
2. $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg B)$
3. $\neg A \vee ((B \vee C) \rightarrow (\neg B \wedge C))$
4. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \leftrightarrow \neg B)$
5. $\neg(((A \rightarrow C) \rightarrow (A \wedge C)) \wedge \neg B)$
6. $(A \rightarrow C) \wedge (\neg C \wedge A)$

a) Za svaki od iskaza 1.–6. iz skupa Γ navedite najmanji njemu ekvivalentan iskaz koji sadrži samo standardne logičke veznike, tj. iskaz s najmanjim brojem (možda nulom) pojavaka (pojava, nastupa, javljanja) veznika \neg , \wedge , \vee , \rightarrow i \leftrightarrow . Osim navedenih veznika, u rješenjima koristite samo jednostavne iskaze A i B . Ako ima više rješenja, napišite samo jedno.

- | | | |
|----------|----------|----------|
| 1. _____ | 2. _____ | 3. _____ |
| 4. _____ | 5. _____ | 6. _____ |

(6×3 boda = 18 bodova)

b) U odgovorima na sljedeća pitanja imajte na umu da je i sam skup Γ podskup skupa Γ . Ostale podskupove skupa Γ označavajte tako da unutar vitičastih zagrada kao imena iskaza upišete brojke koje stoje ispred iskaza. Na primjer, $\{1\}$ je skup koji kao svoj jedini član ima iskaz $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$, a $\{1, 2\}$ skup kojega su jedini članovi iskazi $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ i $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg B)$. Ako ima više točnih rješenja, napišite samo jedno.

- i. Je li skup Γ suvisao? DA / NE
- ii. Koji je najveći suvisao podskup skupa Γ ?

- iii. Koji je broj elemenata minimalan podskup skupa Γ iz kojega slijedi iskaz $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg(A \wedge \neg B)$?

- iv. Koji je broj elemenata minimalan podskup skupa Γ iz kojega slijedi iskaz $(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$?

- v. Koji je broj elemenata minimalan suvisao podskup skupa Γ iz kojega slijedi iskaz $(\neg A \leftrightarrow B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$?

- vi. Koji je broj elemenata maksimalan podskup skupa Γ iz kojega slijedi iskaz $\neg(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$?

- vii. Koji je broj elemenata minimalan suvisao podskup skupa Γ iz kojega slijedi iskaz $B \vee C$?

(7×3 boda = 21 bod)

c) Neka su iskazi iz skupa Γ poredani u neki niz, npr. 4, 5, 2, 3, 1, 6. Odnosno, neka je iskaz 4 prvi član niza, iskaz 5 drugi, iskaz 2 treći, itd. Krenimo od praznoga skupa iskaza, koji ćemo nazvati Γ_0 . Prazan skup iskaza suvisao je skup. Dodajmo skupu Γ_0 prvi član niza, tj. iskaz 4. Time smo dobili skup $\{4\}$. Ako je tako dobiven skup iskaza suvisao, nazovimo taj skup Γ_1 . Ako nije suvisao, stavimo da je $\Gamma_1 = \Gamma_0$. Uzmimo zatim skup Γ_1 i dodajmo mu drugi član niza, tj. iskaz 5. Dobili smo time ili skup $\{4, 5\}$ (ako je $\{4\}$ suvisao) ili pak skup $\{5\}$ (ako je $\{4\}$ nesuvisao). Provjeravamo ponovo je li tako dobiven skup suvisao. Ako jest, nazovimo ga Γ_2 . Ako nije, stavimo da je $\Gamma_2 = \Gamma_1$. (Primijetite da, ako ni $\{4\}$ ni $\{5\}$ nisu suvisli, Γ_2 je prazan skup.) Uzmimo sada Γ_2 i dodajmo mu treći član niza. Ponovo, ako smo time dobili suvisao skup, nazovimo ga Γ_3 , a ako smo dobili nesuvisao skup, stavimo da je $\Gamma_3 = \Gamma_2$. Ponavljajući te korake sve dok ne razmotrimo i zadnji član niza iskaza, dobivamo niz suvislih skupova iskaza $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_6$. Γ_6 u našem je slučaju skup $\{4, 5, 2, 1\}$. Vaš je zadatak odrediti Γ_6 za sljedeće nizove iskaza (brojevi su brojevi ispred formula na početku zadatka):

- i. 1, 2, 3, 4, 5, 6: _____
- ii. 4, 2, 3, 5, 6, 1: _____
- iii. 2, 1, 5, 6, 4, 3: _____
- iv. 6, 3, 5, 1, 2, 4: _____

(4×3 boda = 12 bodova)

(Ukupno 51 bod.)

Zadatak 6.

Svi iskazi iskazne logike mogu se nekim postupkom (primjerice prema abecednom redu i broju pojavaka (pojava, nastupa, javljanja) simbola u iskazima) na različite načine poredati u *beskonačan* niz iskaza: prvi iskaz, drugi iskaz, treći iskaz, itd. Uzimajući iskaze jedan za drugim i sljedeći postupak izgradnje niza skupova $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, opisan u trećem podzadatku prethodnoga zadatka (osim ovoga, zadaci inače nisu povezani), dobivamo beskonačan skup iskaza Γ_ω , koji sadrži upravo one iskaze koji se javljaju u barem jednom od skupova $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$. Skup Γ_ω ima zanimljivo logičko svojstvo: taj je skup iskaza suvisao (zadovoljiv, konzistentan), no svako proširenje toga skupa nekim novim iskazom (tj. bilo kojim iskazom iskazne logike koji nije član toga skupa) rezultira nesuvislim (nezadovoljivim, inkonzistentnim) skupom. Svaki suvisao skup iskaza iskazne logike koji proširen novim iskazom daje nesuvisao skup nazivamo maksimalnim suvislim skupom iskaza iskazne logike. Za svaki mogući poredak iskaza u beskonačnom nizu, Γ_ω je maksimalan suvisao skup. Jesu li sljedeće tvrdnje o maksimalnim suvislim skupovima iskaza iskazne logike (MSS) istinite?

Napomena: U iskaznoj logici iskaz P slijedi iz beskonačnoga skupa iskaza Γ ako i samo ako P slijedi iz nekog konačnog podskupa od Γ .

- | | |
|--|---------|
| 1. Najviše je jedan skup iskaza MSS. | DA / NE |
| 2. Svaki konačan suvisao skup iskaza podskup je barem jednoga MSS-a. | DA / NE |
| 3. Ako iskaz P slijedi iz MSS-a, P je tautologija. | DA / NE |
| 4. Svaki MSS kao članove sadrži samo tautologije. | DA / NE |
| 5. Sve su tautologije članovi barem jednog MSS-a. | DA / NE |
| 6. MSS može kao svoj član sadržavati kontradikciju. | DA / NE |
| 7. Postoji član MSS-a koji ne slijedi iz MSS-a. | DA / NE |
| 8. Svi iskazi koji ne sadrže nijek članovi su svakog MSS-a. | DA / NE |

(8×3 boda = 24 boda)