

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ LOGIKE

7. ožujka 2025.

BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA*
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD*
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA*

*Osim ako je u uputi u zadatku navedeno drukčije.

B-KATEGORIJA

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAX BODOVA
1.		64
2.		42
3.		24
4.		30
UKUPNO		160

Vrijeme rješavanja testa: 90 minuta

Zadatak 1.

Dan je deduktivni sustav logike LD, okarakteriziran četirima aksiomatskim shemama:

- 1) $Dp \rightarrow \neg D\neg p$
- 2) $Fp \leftrightarrow D\neg p$
- 3) $Ap \leftrightarrow (\neg Dp \wedge \neg D\neg p)$
- 4) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (Dp \leftrightarrow Dq).$

Te se sheme dodaju deduktivnom sustavu iskazne logike (logike sudova). Aksiomatske su sheme, za razliku od aksioma, izražene u *metajeziku*, a možemo ih definirati kao poopćene (generalizirane) oblike aksioma. Stoga u gornjim shemama simboli “ p ” i “ q ” označavaju bilo koje iskaze (sudove) predmetnog jezika logike LD. Nadalje, operatori D , F i A jednomjesni su operatori. Ako je p neki iskaz u jeziku LD, tada su to i iskazi Dp , Fp i Ap . Primjerice, iskazi mogu biti oblika DDp , $\neg FFp$, kao i $F\neg(p \wedge q)$. Posebne operatore logike LD čitamo na sljedeći način:

- Dp – “Subjekt želi da p .”
- Fp – “Subjekt strahuje od p .”
- Ap – “Subjekt je apatičan (ravnodušan) prema p .”

Koje od ovih formula predstavljaju teoreme (poučke) u deduktivnom sustavu LD? Zaokružite “DA” ako formula odgovara teoremu, a “NE” ako formula ne odgovara teoremu.

- | | |
|---|---------|
| a1) $D\neg\neg p \rightarrow Dp$ | DA / NE |
| a2) $\neg Fp \rightarrow Dp$ | DA / NE |
| a3) $D\neg D\neg p \rightarrow DDp$ | DA / NE |
| a4) $F\neg Dp \rightarrow DF\neg p$ | DA / NE |
| | |
| b1) $(\neg Dp \wedge \neg Fp) \rightarrow Ap$ | DA / NE |
| b2) $A\neg p \rightarrow (\neg Dp \wedge \neg Fp)$ | DA / NE |
| b3) $(\neg D\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow A\neg p$ | DA / NE |
| b4) $Ap \rightarrow (\neg Dp \wedge \neg F\neg p)$ | DA / NE |
| | |
| c1) $Ap \rightarrow \neg A\neg p$ | DA / NE |
| c2) $Ap \rightarrow A\neg p$ | DA / NE |
| c3) $Ap \rightarrow A\neg\neg p$ | DA / NE |
| c4) $Ap \rightarrow \neg Ap$ | DA / NE |

d1) $Dp \rightarrow \neg p$	DA / NE
d2) $Dp \rightarrow p$	DA / NE
d3) $Fp \rightarrow \neg p$	DA / NE
d4) $Fp \rightarrow p$	DA / NE
e1) $F(p \vee \neg p) \rightarrow (Fp \vee F\neg p)$	DA / NE
e2) $(Fp \wedge F\neg p) \rightarrow F(p \wedge \neg p)$	DA / NE
e3) $D(p \rightarrow q) \rightarrow (Dp \rightarrow Dq)$	DA / NE
e4) $Dp \rightarrow DDp$	DA / NE
f1) $D(p \wedge \neg p) \rightarrow q$	DA / NE
f2) $q \rightarrow D(p \vee \neg p)$	DA / NE
f3) $F(((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))) \rightarrow D(p \wedge \neg p)$	DA / NE
f4) $F\neg((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)) \rightarrow D(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$	DA / NE
g1) $(Dp \rightarrow \neg p) \rightarrow (F\neg p \rightarrow p)$	DA / NE
g2) $(Dp \rightarrow \neg p) \rightarrow (F\neg p \rightarrow \neg p)$	DA / NE
g3) $\neg(Dp \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg F\neg p \rightarrow p)$	DA / NE
g4) $(Fp \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg D\neg p \rightarrow \neg p)$	DA / NE
h1) $((Dp \rightarrow \neg p) \wedge (Fp \rightarrow \neg p)) \rightarrow (p \rightarrow Ap)$	DA / NE
h2) $((D\neg p \rightarrow p) \wedge (F\neg p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow Ap)$	DA / NE
h3) $((D\neg p \rightarrow p) \wedge (F\neg p \rightarrow p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow Ap)$	DA / NE
h4) $((Dp \rightarrow \neg p) \wedge (Fp \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow Ap)$	DA / NE

(32 × 2 boda* = 64 boda)

*U ovome zadatku svaki točan odgovor donosi dva boda, izostanak rješenja 1 bod, a netočno rješenje 0 bodova.

Zadatak 2.

Ispunite sljedeći izvod koristeći se sustavom prirodne dedukcije. Kako postoje različite konvencije oko detalja u prirodnoj dedukciji, dobro proučite pravila u prilogu (na posljednjim stranicama testa).

1	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)$	pretp.
2	$\neg S \vee (T \rightarrow U)$	pretp.
3	$(Q \vee U) \rightarrow V$	pretp.
4	$\neg V \vee W$	pretp.
5	$P \vee (R \wedge T)$	pretp.
6	$\neg W$	pretp.
7		
8		$\wedge$ i, 1
9		
10		
11		$\rightarrow$ i, 3, 10
12		
13		$\neg V$ op., 12
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21	$\neg P \vee R$	

Napomena: Potpuno točno ispunjen redak, uključujući i opravdanje, donosi tri boda. Izostanak rješenja donosi jedan bod, a nepotpuno ili pogrešno rješenje nula bodova.

(14 × 3 boda = 42 boda)

Zadatak 3.

U koliko je redaka u istinitosnoj tablici dana formula istinita? Na praznu crtu upišite broj.

a) $(\neg A \vee B) \wedge (B \rightarrow (\neg C \wedge \neg A)) \wedge (A \vee C)$ _____

b) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$ _____

c) $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (C \leftrightarrow D)) \leftrightarrow ((A \leftrightarrow C) \leftrightarrow (B \leftrightarrow D))$ _____

d) $((A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg C) \wedge ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg C)$ _____

e) $(A \vee B \vee C \vee D \vee E) \rightarrow (A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E)$ _____

f) $(A \rightarrow ((B \leftrightarrow A) \wedge C)) \vee ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \vee D$ _____

g) $((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)) \wedge ((A \vee B) \rightarrow C)$ _____

h) $(\neg A \rightarrow ((D \leftrightarrow B) \leftrightarrow D)) \leftrightarrow (C \wedge \neg A)$ _____

(8 × 3 boda = 24 boda)

Zadatak 4.

U prvom stupcu svakoga podzadatka nalaze se sve premise nekoga zaključka, a u drugom je stupcu naveden zaglavak (konkluzija) toga zaključka. U treće polje upišite “V” ako je zaključak valjan, odnosno “N” ako zaključak nije valjan.

- | | | | |
|----|--|--|-------|
| a) | $\forall x((Ax \vee Bx) \wedge (Cx \rightarrow Dx))$
$\forall x(Dx \rightarrow Ax)$ | $(\neg \exists x(Bx \wedge Cx)) \rightarrow \forall x(Bx \rightarrow \neg Dx)$ | _____ |
| b) | $\forall x \forall y(Pxy \rightarrow Qy)$ | $\forall y(\neg Qy \rightarrow \neg \exists x Pxy)$ | _____ |
| c) | $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow ((Ax \wedge By) \vee (Ay \wedge Bx)))$ | $\neg \exists x \exists y \exists z \neg (Rxy \rightarrow (\neg Ryz \vee \neg Rzx))$ | _____ |
| d) | $\forall x \exists y Pxy \rightarrow \forall x Qx$ | $\forall x \forall y(Pxy \rightarrow Qx)$ | _____ |
| e) | $\exists x \forall y \forall z \neg (Qxy \rightarrow (Px \wedge Rzy))$ | $\forall x \exists y (Qyx \wedge \forall z (Rzx \rightarrow \neg Py))$ | _____ |
| f) | $\exists x \exists y \forall z ((Fz \rightarrow Gx) \wedge (Gy \rightarrow Fz))$ | $\forall x \exists y (Fx \leftrightarrow Gy)$ | _____ |
| g) | $\exists x \forall y (Rxy \wedge Qy) \vee \forall y (\exists x Pxy \rightarrow \forall x Rxy)$ | $\exists x \forall y (Pxy \vee Qx \vee Rxy)$ | _____ |
| h) | $(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow C$
$((B \wedge D) \vee C) \rightarrow A$ | $A \leftrightarrow (B \vee C)$ | _____ |
| i) | $((P \rightarrow Q) \wedge (\neg R \rightarrow P)) \wedge (\neg Q \rightarrow \neg R)$
$(\neg P \leftrightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow P)$ | P | _____ |
| j) | $\neg((Q \wedge (P \leftrightarrow (R \vee \neg Q))) \wedge Q) \rightarrow \neg P$ | $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow (R \vee \neg Q))$ | _____ |

(10 × 3 boda = 30 bodova)

PRILOG: Dopusštena pravila prirodne dedukcije

- Opravdanja se sastoje od triju podataka, a to su: simbol veznika, slovo u ili i (za uvođenje/isključenje), te jedan ili više brojeva ili brojevni raspona. Te tri informacije mogu biti odijeljene razmakom, zarezom, kosom crtom ili nekako drugačije. Poredak tih triju informacija proizvoljan je (to ne znači da je poredak brojeva proizvoljan). Iznimno, reiteracija (opetovanje) ne sadržava slovo u ili i.
- Kod nekih je pravila poredak premisa iz kojih slijede proizvoljan, što je signalizirano **zvjezdicom** (*). Kod takvih se pravila iznimno dopušta i proizvoljan poredak u zapisu brojeva u opravdanju. Primjerice, kod uvođenja konjunkcije redak rednog broja k mogao se pojaviti prije retka rednog broja j , a u opravdanju je u oba slučaja moglo pisati $\wedge u, j, k$ ili $\wedge u, k, j$. U svim četirima slučajevima pravilo zovemo $\wedge u$.
- Tri točkice signaliziraju da su na označenom mjestu možda i dodatni retci osim onih upisanih.

Uvođenje konjunkcije. *

j		A	
		$\vdots$	
k		B	
		$\vdots$	
		$A \wedge B$	$\wedge u, j, k$

Uvođenje disjunktije.

j		A		j		B	
		$\vdots$				$\vdots$	
		$A \vee B$	$\vee u, j$			$A \vee B$	$\vee u, j$

Uvođenje kondicionala.

j			A	pretp.
			$\vdots$	
k			B	
			$A \rightarrow B$	$\rightarrow u, j-k$

Uvođenje bikondicionala.

j			A	pretp.
			$\vdots$	
k			B	
m			B	pretp.
			$\vdots$	
n			A	
			$A \leftrightarrow B$	$\leftrightarrow u, j-k, m-n$

Uvođenje kontradikcije. *

j		A	
		$\vdots$	
k		$\neg A$	
		$\vdots$	
		$\perp$	$\perp u, j, k$

Uvođenje negacije.

j			A	pretp.
			$\vdots$	
k			$\perp$	
			$\neg A$	$\neg u, j-k$

Isključenje konjunkcije.

j		$A \wedge B$		j		$A \wedge B$	
		$\vdots$				$\vdots$	
		A	$\wedge i, j$			B	$\wedge i, j$

Isključenje disjunktije.

e		$A \vee B$	
		$\vdots$	
j		A	pretp.
		$\vdots$	
k		C	
m		B	pretp.
		$\vdots$	
n		C	
		C	$\vee i, e, j-k, m-n$

Isključenje kondicionala. *

j		$A \rightarrow B$	
		$\vdots$	
k		A	
		$\vdots$	
		B	$\rightarrow i, j, k$

Isključenje bikondicionala. *

j		$A \leftrightarrow B$		j		$A \leftrightarrow B$	
		$\vdots$				$\vdots$	
k		A		k		B	
		$\vdots$				$\vdots$	
		B	$\leftrightarrow i, j, k$			A	$\leftrightarrow i, j, k$

Isključenje kontradikcije.

j		$\perp$	
		$\vdots$	
		A	$\perp i, j$

Isključenje negacije.

j		$\neg \neg A$	
		$\vdots$	
		A	$\neg i, j$

Reiteracija (opetovanje).

j		A	
		$\vdots$	
		A	re., j (ili op., j)